УДК 512, 517, 519.2
№ 0118U004755
Інв. №

МІНІСТЕРСТВО ФІНАНСІВ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ПОДАТКОВИЙ УНІВЕРСИТЕТ
вул. Університетська, 31, м. Ірпінь, Київська обл., 08205
тел. +38 (04597) 60294,
e-mail: 11.02@dpu.edu.ua

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з науково-педагогічної
роботи та соціального розвитку
__________ Дмитро ВЕНЦКОВСЬКИЙ
«___» ___________ 2024р.

ЗВІТ ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ (ДіР)
на тему «НЕСКІНЧЕННІ ГРУПИ З ОБМЕЖЕННЯМИ ДЛЯ ПІДГРУП ТА РЕАЛІЗАЦІЯ МІЖПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН В ЕКОНОМІЧНИХ ВУЗАХ»

кафедри кібернетики та прикладної математики
(термін виконання: 2018-2023 рр.)

Розглянуто і схвалено
Вченою радою Державного податкового університету,
протокол № 9 від 24.01. 2024р.
Учений секретар __________ Олександра СМІРНОВА

Ірпінь – 2023

Зміст

ВСТУП

Актуальність теми

Вивчення груп за властивостями різних важливих систем їх підгруп почалося з самого моменту оформлення теорії груп як окремої абстрактної алгебраїчної дисципліни. Досить вказати тут класичні роботи Р.Дедекінда [1], що вивчав скінченні групи, всі підгрупи яких нормальні та Г.Міллера і Х.Морено [2], які вивчали скінченні групи, всі власні підгрупи яких абелеві. Цей напрямок отримав чітке продовження у роботі О.Ю.Шмідта [3], а також у роботах О.Ю.Шмідта [4, 5], Р.Бера [6, 7], Ф.Холла [8 – 10], Б.Х.Неймана [11], О.Г.Куроша та С.М.Чернікова [12], С.М.Чернікова [13 – 25]. Подальший розвиток теорії нескінченних груп, зокрема великий масив відомих класичних результатів, отриманих А.Г.Курошем та С.М.Черніковим, С.М.Черніковим, Ф.Холлом, Р.Бером, Б.Х.Нейманом (див., наприклад, оглядові статті [26] та [27]), зробив цей напрямок одним з важливіших для теорії груп. Велику роль у формуванні цього напрямку зіграли оглядові статті С.М.Чернікова [14, 18, 21], які визначили проблематику та конкретні етапи і напрямки подальших досліджень. Цей розділ теорії груп був збагачений роботами таких відомих алгебраїстів як А.І.Мальцев, В.М.Глушков, М.І.Каргаполов, В.С.Чарін, Ю.М.Горчаков, Ю.І.Мерзляков, В.П.Шунков, Д.І.Зайцев, Г.Баумслаг, Г.Віландт, О.Кегель, Б.Хартлі, Г.Хейнекен, Х.Цассенхауз. Він продовжує бути важливим та цікавим і до нашого часу; багато самих різноманітних результатів, отриманих на протязі останніх десятиріч у роботах М.Діксона, М.Еванса, Ф.де Жіованні та С.Франціозі, Л.Ковача, М.Ф.Кузенного, Л.А.Курдаченко, М.Ньюелла, М.Ньюмена, Я.П.Сисака, Х.Сміта, М.Томкінсона, Дж.Уайголда, Дж.Уілсона, Р.Філліпса, М.С.Чернікова та багатьох інших, свідчать про це. Більш того, цей напрямок був розширений на топологічні групи в роботах В.М.Глушкова, В.С.Чаріна, В.П.Платонова, І.В.Протасова, на модулі над груповими кільцями (див., наприклад, оглядову статтю [28]), на алгебри Лі та інші алгебраїчні структури. До цього напрямку досліджень належить дана дисертаційна робота.

Основні природні системи підгруп, вплив яких на будову всієї групи вивчається досить давно, це системи всіх (власних) підгруп, всіх абелевих підгруп, всіх неабелевих підгруп, всіх нормальних підгруп, всіх субнормальних підгруп, всіх ненормальних підгруп, всіх майже нормальних підгруп, всіх скінченно породжених підгруп, всіх скінченних підгруп, всіх циклічних підгруп, всіх нециклічних підгруп. Вплив системи нормальних підгруп почав вивчатися ще Р.Дедекіндом [1], що описав будову скінченних груп, всі підгрупи яких нормальні. Результати Р.Дедекінда були розширені на довільні групи Р.Бером [6].

Наступний етап був пов'язаний з вивченням груп, у яких система нормальних підгруп задовольняє умову мінімальності (груп з умовою Min-n) або умову максимальності (груп з умовою Max-n). Фундаментальні результати С.М.Чернікова [13], Р.Бера [7], Ф.Холла [8 – 10], В.С.Чаріна [29, 30,] про ці групи докорінним чином змінили обличчя теорії нескінченних груп з умовами скінченності. З іншого боку, С.М.Черніков звернув увагу на систему всіх ненормальних підгруп групи. У роботі [23] він розглянув групи, у яких система ненормальних підгруп задовольняє умову мінімальності, та деякі їх узагальнення. Таким чином, приходимо до груп, у яких система всіх ненормальних підгруп є дуже "малою" у деякому сенсі, а значить, її система всіх нормальних підгруп буде дуже "великою". Це був новий підхід, який дозволяв вивчати вплив тієї чи іншої системи нормальних підгруп на будову групи, поступово, крок за кроком, "зменшуючи" її (а значить, відповідно "збільшуючи" систему ненормальних підгруп) за допомогою різних додаткових умов. Цей підхід був реалізований у інших роботах С.М.Чернікова [18, 19, 20, 22], роботах Л.А.Курдаченка, М.Ф.Кузенного, М.М.Семка [31], Дж. Кутоло

[32], Дж.Кутоло та Л.А.Курдаченка [33], С.Франціозі, Ф. де Жіованні та Л.А.Курдаченка [34], Ф.М.Лимана [35 – 40], Г.М.Ромаліса та Ф.М.Сесекіна [41 – 43], В.Т.Нагребецького [44], О.О.Махньова [45], М.Ф.Кузенного та М.М.Семка [46 – 56], М.С.Чернікова [57 – 58], Л.А.Курдаченка та В.В.Пилаєва [59], В.І.Коваленка [60] та інших авторів.

У роботах [17, 18] С.М.Черніков також звернув увагу на роль нескінченно породжених, нескінченних та нециклічних підгруп групи. Система скінченно породжених та скінчених підгруп розглядалась досить часто у зв'язку з локальними теоремами та локально визначеними класами груп. Накладання обмежень на систему скінченно породжених підгруп приводило як до нових характеризацій вже вивчених класів груп, так і до появи нових цікавих класів груп. Наприклад, якщо всі скінченно породжені (навіть всі циклічні) підгрупи є нормальними, то всі її підгрупи будуть нормальними, тобто отримуємо дедекіндові групи. Але якщо всі скінченно породжені (навіть всі циклічні) підгрупи є субнормальними, то отримуємо новий цікавий клас груп – групи Бера, про опис якого зараз не можна і мріяти. С.М.Черніков був першим, хто поставив питання про вивчення впливу на будову групи систем нескінченних, нескінченно породжених та нециклічних підгруп. Зокрема у роботі [18] він поставив питання про будову груп, всі нециклічні підгрупи яких нормальні або майже нормальні. Відповіді на перше питання була присвячена серія робіт Ф.М.Лимана [35 – 40], а відповідь на друге питання була отримана в роботі С.Франціозі, Ф. де Жіованні та Л.А.Курдаченка [34].

У роботі [61] А.Манн почав розглядати нове цікаве поняття щільної системи підгруп.

Точніше він почав розглядати групи, які задовольняють наступну умову: для будь-якої пари таких підгруп H, K групи $G,$ що $H \le K$ та H не максимальна в K існує нормальна (відповідно субнормаль на) підгрупа S з властивістю $H < S \le K.$ Поняття щільності було узагальнено С.М.Черніковим (див. [25, розділ 7]. Він же ввів поняття умов щільності і строгої щільності для будь-якої теоретико-групової властивості V (доповнюваності, субнормальності, майже нормальності і т.д.) системи підгруп Σ. Властивість V підгруп групи G називається щільною (строго щільною) по відношенню до системи підгруп Σ, якщо для будь-яких підгруп A і B із Σ, де A – власна немаксимальна підгрупа з B, існує така підгрупа H із властивістю V, що $A \leq H \leq B$ ($A < H < B$). Ці поняття широко використовувалися в роботах С.М.Чернікова і його учнів (М.С.Черніков, Л.А.Курдаченко, М.Ф.Кузенний, В.В.Пилаєв, В.Е. Горецький, М.М.Семко)

Різноманітні умови щільності нормальності для системи підгруп Σ групи G у роботах [62 – 79] базуються на поняттях: відрізка ($[A; B]$) –, інтервалу ($(A; B)$) –, напівінтервалу ($(A; B]$) –, напівінтервалу ($[A; B)$) підгруп групи G, кожний із яких є множиною всіх підгруп X групи G таких, що A і B із Σ, A – підгрупа з B і відповідно: $A \leq X \leq B$; $A < X < B$; $A < X \leq B$; $A \leq X < B$. Потужність відрізка, інтервалу, півінтервалу підгруп групи G називається його модулем, порядком або довжиною і позначається відповідно: $|[A; B]|$; $|(A; B)|$; $|(A; B]|$; $|[A; B)|$. За означенням $|[A; B]| \geq 1$, тобто A – підгрупа з B, при $|[A; B]| > 1$ A – власна підгрупа з B, при $|[A; B]| > 2$ A – власна немаксимальна підгрупа з B.

У цій термінології А. Манн [61] розглядав групи, у яких Σ – система всіх підгруп групи G і для кожного відрізка $[A; B]$ такого, що $|[A; B]| > 2$ справедливе співвідношення $[A; B) \ni N \triangleleft G$.

В.Е. Горецький [80] вивчав нескінченні групи, у яких $|[A; B]| > 2$ і Σ – система всіх: нескінченних –, нескінченних абелевих –, нескінченних неабелевих підгруп групи G, для яких $[A; B] \ni N \triangleleft G$.

М.М. Семко [62 – 79] описав локально ступінчасті групи G, у яких $\left|[A;\ B]\right| > 1$, Σ – система всіх підгруп групи G, $[A;\ B]$ э N □ G та їх підкласи.

Якщо Σ – система всіх нециклічних підгруп групи G, $\left|[A;\ B]\right| > 1$ і $[A; B]$ э $N \triangleleft G$, то одержимо класи груп з різноманітними умовами щільності нормальності для нециклічних підгруп. Зауважимо, що ці класи груп є нові і вони значно узагальнюють клас дедекіндових груп [1, 6], класи груп з різними умовами щільності нормальності для всіх підгруп [62 – 79], клас груп з нормальними нециклічними підгрупами [35, 36].

В даному звіті проводиться узагальнення дедекіндових груп. Він здійснюється завдяки різноманітним умовам щільності нормальності для різних систем підгруп.

Метою даної роботи є дослідження наступних класів груп з умовами різноманітної щільності нормальності для нециклічних груп:

- *ЩН*[$\overline{C}$]-груп, тобто груп G, у яких $|[A;\ B]| > 1$, A – нециклічна підгрупа та $[A; B]$ э $N \triangleleft G$;
- *УЩН*[$\overline{C}$]-груп та їх підкласів, тобто груп G, у яких $|[A;\ B]| > 2$, A – нециклічна підгрупа та $[A; B]$ э $N \triangleleft G$.

Робота має теоретичний характер. Описані класи груп розширюють конкретну базу груп з нормальними підгрупами. Ці результати можуть використовуватися в різних теоретико-групових дослідженнях.

Результати даної роботи доповідалися і опубліковані.

РОЗДІЛ I

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

У цьому розділі дається огляд літератури, присвяченої дослідженням узагальнень дедекіндових груп. Наведено короткий виклад відомих результатів які використовуються в подальшому.

Як уже зазначалось у вступі, групи G, у яких деяка система підгруп Σ групи G задовольняє умову нормальності вивчались багатьма авторами. Ми не будемо говорити про прості групи, що мають тривіальну систему нормальних підгруп, а наведемо короткий огляд досліджень груп з більш широкими системами нормальних підгруп.

Легко впевнитись, що гамільтонові групи можна означити як неабелеві групи, у яких нормальні всі абелеві підгрупи або навіть лише всі циклічні підгрупи. Тому, бажаючи одержати розширення класу гамільтонових груп, слід так звужувати пов'язану з ним визначальну систему підгруп Σ, щоб при цьому з неї випадали деякі або всі циклічні підгрупи. Таким шляхом виділяється клас $\overline{H}$-груп, для якого визначальна система підгруп Σ складається з нециклічних підгруп і клас $\overline{HA}$-груп, для якого визначальна система підгруп Σ складається лише з абелевих нециклічних підгруп.

Обидва класи груп вивчені Ф.М. Лиманом у роботах [35 – 40] за певних додаткових умов. Для $\overline{H}$-груп такими умовами є їх неабелевість і наявність у групі нормальної системи з локально скінченними факторами. Повний опис $\overline{H}$-груп із названими обмеженнями засвідчує, що у періодичному випадку нескінченні $\overline{H}$-групи нільпотентні класу 2 і є центральними розширеннями квазіциклічних груп за допомогою скінченних дедекіндових груп лише з однією нециклічною силовською підгрупою, яка є або групою кватерніонів, або елементарною абелевою групою порядку p^2. У неперіодичному випадку такі групи мають комутант порядку p і є або напівпрямим добутком циклічної p-групи і нескінченної циклічної групи, або прямим добутком групи кватерніонів і нескінченної циклічної групи чи групи, ізоморфної адитивній групі *2*-ових дробів.

Опис скінченних $\overline{H}$-груп одночасно з Ф.М. Лиманом одержав також А.Д.Устюжанінов [81]. Зауважимо також, що суттєву роль при описі $\overline{H}$-груп відіграють p-групи і особливо *2*-групи. В цьому можна провести певну аналогію з гамільтоновими групами.

З результатів, що відносяться до скінченних $\overline{H}$-груп, легко випливає, що клас скінченних $\overline{H}$-груп містить всі неабелеві групи з одним класом спряжених ненормальних підгруп [4], а також 7 з 8 типів груп з двома класами спряжених ненормальних підгруп [5] і значно багатший вказаних класів.

Отже, при звуженні визначальної системи підгруп Σ класу гамільтонових груп до сукупності одних лише нециклічних підгруп одержуємо істотний приріст класу гамільтонових груп як за рахунок скінченних так і за рахунок нескінченних груп, при цьому у розширенні уже будуть і мішані групи, але груп без скруту немає.

Неперіодичні групи без скруту є серед $\overline{HA}$-груп. Клас $\overline{HA}$-груп можна уявляти як такий, що одержується розширенням класу $\overline{H}$-груп шляхом звуження визначальної системи підгруп Σ до системи, яку складають всі абелеві нециклічні підгрупи.

Клас $\overline{HA}$-груп значно багатший класу $\overline{H}$-груп. Наприклад, якщо всі скінченні $\overline{H}$-групи розв'язні, то серед скінченних $\overline{HA}$-груп є і нерозв'язні. Конкретним прикладом такої групи є нерозв'язна група Фробеніуса, побудована В.Д. Мазуровим [82].

Інший шлях узагальнення класу $\overline{H}$ -груп – це звуження його визначальної системи всіх нециклічних підгруп Σ до системи всіх неабелевих підгруп. При цьому одержимо клас груп, у яких нормальні всі неабелеві підгрупи. Ці групи розпочав вивчати Г.М. Ромаліс у 1962 році і він назвав їх метагамільтоновими.

Різні властивості метагамільтонових груп отримали Г.М. Ромаліс та М.Ф.Сесекін [41 – 43], С.М. Черніков [19, 20, 25]. Зокрема, С.М. Черніков встановив скінченність і примарність комутанту локально ступінчастих метагамільтонових груп. В.Т. Нагребецький [44] описав скінченні ненільпотентні метагамільтонові групи, О.О. Махньов [45] – скінченні метагамільтовані *p*-групи з нецентральним комутантом. Повний опис локально ступінчастих метагамільтонових груп одержали М.Ф. Кузенний та М.М.Семко [46 – 56].

При вивченні нескінченних груп з тим чи іншим визначальним обмеженням природно до визначальної системи підгруп Σ відносити деяку підмножину множини всіх нескінченних підгруп, зокрема, і всю множину нескінченних підгруп групи. Різні класи нескінченних неабелевих груп з нормальністю як визначальним обмеженням вивчав С.М. Черніков.

У цьому напрямку перш за все виділяється клас нескінченних неабелевих груп, у яких нормальні всі нескінченні підгрупи. Такі групи названі С.М. Черніковим *INH*-групами [17]. При додатковій умові існування у групі нормальної системи із скінченними факторами *INH*-групи є або гамільтоновими групами, або недедекіндовими розширеннями квазіциклічних груп за допомогою скінченних дедекіндових груп. Отже, будь-яка *INH*-група, як і гамільтонова група, є періодичною групою.

Якщо визначальну систему всіх нескінченних підгруп Σ звузити до системи всіх нескінченних абелевих підгруп, то можна досліджувати нескінченні неабелеві групи, у яких множина нескінченних абелевих підгруп непорожня і містить лише нормальні підгрупи. Ці групи названі С.М. Черніковим *IH*-групами і вивчались ним у роботах [16, 22]. Серед *IH*-груп уже є неперіодичні групи.

Залишивши нормальність в якості визначального обмеження і звузивши систему всіх нескінченних підгруп до системи всіх неабелевих нескінченних підгруп, приходимо до класу $\overline{I}\overline{H}$-груп, які вивчались С.М.Черніковим [15, 19, 20, 25]. Отже, $\overline{I}\overline{H}$-групи можна розглядати як узагальнення *INH*-груп і нескінченних метагамільтонових груп.

Вивчення $\overline{I}\overline{H}$-груп продовжили М.Ф.Кузенний, С.С. Левіщенко, М.М. Семко, І.Я. Субботін [83 – 85]. Конструктивний опис локально ступінчастих $\overline{I}\overline{H}$-груп можна знайти у роботі М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [56].

К. Хоббі [86] вивчав скінченні p-групи, у яких нормальні нормалізатори всіх підгруп.

Дедекіндові групи можна означити як групи, у яких нормальні всі максимальні абелеві підгрупи рангу 1. У випадку скінченних груп ця умова означає нормальність всіх максимальних циклічних підгруп. Послаблюючи цю умову нормальності до умови нормальності всіх циклічних підгруп складених порядків, одержимо деякий клас груп, близьких до дедекіндових. Скінченні *p*-групи такого типу вивчав Л.С. Казарін [87], а скінченні групи, порядок яких ділиться тільки на 3 простих числа – Г. Берштейн [88].

В.Т.Нагребецький [89] вивчав скінченні групи, у яких нормальні всі ненільпотентні підгрупи. Констуктивний опис значного узагальнення таких груп одержали М.Ф. Кузенний та М.М. Семко у роботі [56].

І.Я. Субботін [90, 91] вивчав групи, у яких нормальна кожна підгрупа комутанта.

Г.Жордано [92] розглядав неабелеві локально скінченні групи, у яких кожна підгрупа або збігається зі своїм нормалізатором, або нормальна. Конструктивний опис узагальнень таких груп одержано в [93 – 95].

Значно загальніша ситуація досліджувалась у роботах М.С. Чернікова [58, 59], де вивчались неабелеві групи, у яких нормальні всі абелеві підгрупи, що не збігаються зі своїми нормалізаторами (*AD*-групи). Встановлені критерії локальної скінченності нескінченної періодичності *AD*-групи та належності не локально скінченної періодичності групи до класу *AD*-групи.

М.М. Гольденберг, М.Ф. Сесекін [97] досліджували нескінченні p-групи з нормальними не цілком розщепленими підгрупами. Тут, зокрема, описані p-групи з локально циклічним центром і комутантом порядку p, експонента яких більша p.

М.М. Семко [98] вивчав нескінченні неабелеві групи, у яких нормальна кожна підгрупа, що має нескінченний перетин з деякою фіксованою нескінченною підгрупою групи. Встановлені зв’язки таких груп з *INH*-групами С.М. Чернікова та отримано опис таких груп при умові їх локальної ступінчастості.

А.В.Крайчук [99] вивчав нескінченні неабелеві групи, у яких нормальні всі підгрупи нескінченного індексу.

Л.А. Курдаченко, В.В. Пилаєв [100] дали опис локально майже розв’язних груп, у яких нормальна кожна підгрупа, що не має скінченної системи твірних елементів.

А. Фаттахі [101] досліджував властивості скінченних груп, у яких кожна підгрупа нормальна або абнормальна. Абнормальною називається така підгрупа A групи G, коли для будь-якого елемента g групи G виконується умова $g \in \langle A, g^{-1}Ag \rangle$.

Г. Уолс [102] вивчав скінченні групи, у яких нормальні всі максимальні підгрупи силовських підгруп. Кожна група цього класу є розширенням нормальної холлівської нільпотентної підгрупи за допомогою циклічної групи.

Ще один метод виділення системи нормальних підгруп Σ бере свій початок в роботі Д. Кеппіта [103], а в загальному вигляді для довільних систем підгруп і довільного визначального обмеження сформульований С.М. Черніковим [24]. Ідея цього методу полягає в тому, що у групі виділяється така підгрупа S (сепаруюча підгрупа), що кожна підгрупа з деякої системи підгруп Σ, яка не міститься в S, задовольняє визначальному обмеженню.

До цього напрямку досліджень відносяться роботи А.Ф. Баранника [104 – 106], у яких вивчались групи з нормальними нескінченними неабелевими підгрупами, які не містяться в деякій підгрупі, та групи, у яких нормальні всі підгрупи, що не містяться в жодній із двох заданих підгруп.

Повний опис груп, що досліджувались Д. Кеппітом [103], наведено у роботах М.Ф. Кузенного та М.М. Семка [56, 107].

Е. Бест і О. Таусскі [108] розпочали вивчення неабелевих груп, у яких всі субнормальні підгрупи нормальні, тобто групи з умовою транзитивності нормальності (T-груп). Ці дослідження продовжили В. Гашюц [109], М.М. Абрамовський і М.І. Каргаполов [110] та Д.С. Робінсон [111, 112].

Ф. Джіовані та С. Франчіозі [113] вивчали нескінченні неабелеві групи з умовою транзитивності нормальності для нескінченних підгруп (IT-групи). Кожна нескінченна T-група є IT-групою, але обернене твердження хибне навіть для метабелевих груп.

М.Ф. Кузенний та І.Я. Субботін [114,115] вивчали групи з умовою транзитивності нормальності для неабелевих підгруп. Такі групи виявились розв'язними, а у випадку локально нільпотентних груп вони є нільпотентними метагамільтоновими групами.

М.Ф. Кузенний та Л.І. Зузук [116] одержали конструктивний опис періодичних груп з умовою транзитивності нормальності для неабелевих підгруп при умові, що локально нільпотентний корадикал групи є абелевою підгрупою.

А. Манн [117] вивчав скінченні нерозв'язні групи, у яких кожна підгрупа нормальна або в групі, або в максимальній підгрупі.

Б. Хупперт [118] вивчав скінченні групи, у яких нормальні всі *3*-максимальні підгрупи.

1.1. Відомі результати

Т в е р д ж е н н я 1.1.1 [119*, теорема 12.5.4*]. *Дедекіндові неабелеві групи G вичерпуються гамільтоновими групами, тобто групами типу* $G = Q \times D \times A$, *де Q – група кватерніонів порядку 8, D – елементарна абелева 2-група, A – періодинчна абелева група без інволюцій.*

Для дедекіндових груп G справедливі твердження:

1) якщо G містить елемент нескінченного порядку чи порядку 8, то $G' = 1$;

2) циклічні 2-підгрупи порядку більше двох містять G'.

О з н а ч е н н я 1.1.1 [120]. *Підгрупа* $\omega(G)$ *групи G, породжена всіма елементами з G, порядок яких є просте число, називається нижнім шаром групи G.*

Т в е р д ж е н н я 1.1.2. [120]. *Нижній шар групи G є характеристичною тому нормальною підгрупою групи G.*

О з н а ч е н н я 1.1.2 (*див., наприклад,* [120, § 2]). *Підгрупа A групи G називається максимальною підгрупою G, якщо в G не існує такої підгрупи B, що* $A < B < G$.

Група G називається своєю 0-максимальною підгрупою.

Максимальна підгрупа групи G називається 1-максимальною підгрупою групи G.

При $n > 0$ *підгрупа* A *групи* G *називається* n*-максимальною в* G, *коли вона є максимальною підгрупою деякої* $(n-1)$*-максимальної підгрупи* A *групи* G.

Скінченні неодиничні групи завжди мають власні максимальні підгрупи, а одиничні та деякі нескінченні групи, наприклад, квазіциклічні, не мають власних максимальних підгруп.

Т в е р д ж е н н я 1.1.3 (*теорема з* [121]). *Скінченні ненадрозв'язні групи, які мають власні неметациклічні підгрупи і у яких всяка 2-максимальна підгрупа метациклічна, вичерпуються групами наступних типів:*

1) $G = P \leftthreetimes Q$ – *група Шмідта,* $|P| = p^3$, $exp(P) = p$, $|Q| = q$;

2) $G = P \leftthreetimes Q$, P – *мінімальна нормальна підгрупа з* G, $|P| = p^2$, Q – *циклічна* q*-група,* $[P, \Phi(Q)] = P$, $[P, \Phi(\Phi(Q)] = 1$;

3) $G = P \leftthreetimes Q$, $P = \langle c \rangle P_1$, $c \in Z(G)$, $c \notin P_1$, $c^p \in \Phi(P_1)$, P_1 – *група кватерніонів чи* $|P_1| = p^2$, $|Q| = q$, $P_1 \leftthreetimes Q$ – *група Шмідта;*

4) $G = P \leftthreetimes Q$, $|P| = p^4$, $P' = 1$, $|\Phi(P)| = p^2$, $\Phi(P) \leftthreetimes Q$ *та* $G/\Phi(P)$ – *групи Міллера-Морено;*

5) $G = P \leftthreetimes Q$, P – *група кватерніонів чи елементарна абелева група порядку* p^2, $Q = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|a| = q^\beta$, $P \leftthreetimes \langle a \rangle$ – *група Шмідта,* $[P, b] = 1$, $|[a, b]| \leq q$, $q > 2$;

6) $G = P \leftthreetimes (Q \leftthreetimes R)$, P – *мінімальна нормальна підгрупа з* G, $|P| = p^2$, $P = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, $\langle x \rangle \leftthreetimes Q$ *та* $\langle y \rangle \leftthreetimes Q$ – *групи Міллера-Морено,* $|R| = r$, $[Q, R] = Q$, $1 < [Q, R] < P$;

7) $G = (R \times P) \leftthreetimes Q$, P – *група кватерніонів чи* $|P| = p^2$, $P \leftthreetimes Q$ – *група Шмідта,* $|R| = r$ *чи* r^2, *якщо* $|R| = r^2$, *то* $R \leftthreetimes Q$ – *група Шмідта;*

8) $G = P \leftthreetimes (Q \times R)$, $|P| = p^2$, $|R| = r$, $P \leftthreetimes Q$ *та* $P \leftthreetimes R$ *– групи Міллера-Морено;*

9) $G = A \leftthreetimes (< a > \leftthreetimes < b >)$, $|A| = 4$, $|a| = 3^{\beta}$, $0 < \beta < 3$, $A \leftthreetimes < a >$ *– група Міллера-Морено,* $|b| = 2$, $< [a, b] > = < a >$, $A \leftthreetimes < b >$ *– група діедра;*

10) $G = A \cdot (< a > \leftthreetimes < b >)$, $A \trianglelefteq G$, *A – група кватерніонів,* $|a| = 3^{\beta}$, $0 < \beta < 3$, $A \leftthreetimes < a >$ *– група Шмідта,* $|b| = 2^{\alpha}$, $0 < \alpha < 3$, $<[a, b]> = < a >$, $\Phi(< b >) \leq \Phi(A)$, $A <b>/\Phi(A)$ *– група Міллера-Морено;*

11) $G \cong SL(2, p)$ *чи* $G \cong PSL(2, p)$, *де* $p = 5$ *чи* $p \geq 13$, $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$.

В групах типів 1 – 11 p, q, r – різні прості числа.

Т в е р д ж е н н я 1.1.4 (*теорема 1.1.1* з [62]). *Локально ступінчасті групи G, що не породжуються своїми власними немаксимальними підгрупами, вичерпуються групами порядку* 1 *і p (p – просте число) і скінченними розв'язними 2-породженими групами, у яких усі власні немаксимальні підгрупи породжують власну нормальну підгрупу M, і G ізоморфна групі одного з типів:*

1) *G – циклічна група порядку* p^{α} *, p – просте число,* $\alpha > 0$, $M = \Phi(\Phi(G))$ *– 2-максимальна підгрупа з G;*

2) $|G| = pq$, *p і q – необов'язково різні прості числа,* $M = 1$ *– 2-максимальна підгрупа з G;*

3) *G – група кватерніонов,* $M = \Phi(G)$ *– 2-максимальна підгрупа з G;*

4) *G – циклічна група порядку* $p^{\alpha}q$, *p і q – різні прості числа,* $\alpha > 1$, *M – максимальна підгрупа з G,* $|M| = p^{\alpha-1}q$;

5) $G = <x> \leftthreetimes <z>$, $|x| = p^{\alpha}$, $|z| = p$, $\alpha > 1$, $[x,z] \in <x^{p^{\alpha-1}}>$, $[G:G'] > 4$, $M = <x^p> \times <z>$ *– максимальна підгрупа з G;*

6) $G = R \leftthreetimes \langle x\rangle$, $|R| = r^{\alpha} > 2$, $|x| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta > 2$, *r і q - різні прості числа,* $\langle x\rangle$ *– максимальна підгрупа з G,* $M = R \leftthreetimes \langle x^{q}\rangle$ *– максимальна підгрупа з G.*

Т в е р д ж е н н я 1.1.5 [122]. *Локально ступінчасті групи G з циклічними власними підгрупами вичерпуються групами типів:*

1) *G – циклічна чи квазіциклічна група;*

2) *G – група типу (p, p);*

3) *G – група кватерніонів порядку 8;*

4) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = p > 2$, $|b| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, *p і q – прості числа,* $p \equiv 1 (mod\ q)$, $G' = \langle a\rangle$, $Z(G) = \langle b^{q}\rangle$.

Т в е р д ж е н н я 1.1.6 [122]. *Локально ступінчасті групи Шмідта вичерпуються групами типу* $G = P \leftthreetimes Q$, $|P| = p^{\alpha}$, $p^{\alpha} > 2$, $G' = P$, $Q = \langle b\rangle$, $|b| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, *p і q – різні прості числа,* $Z(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q)$, $\Phi(P) \times Q$ *– максимальна підгрупа з G,* $\Phi(P) = P'$, *експонента P належить {p, 4},* $[P : \Phi(P)] = p^{\Delta}$, *Δ – показник p за модулем q.*

Т в е р д ж е н н я 1.1.7 [122]. *Локально ступінчасті групи Міллера-Морено вичерпуються групами типів:*

1) $G = \langle a, b\rangle$ *– група кватерніонів порядку 8,* $a^2 = b^2 = [a, b]$;

2) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = p^{\alpha}$, $\alpha > 1$, $|b| = p^{\beta}$, $\beta > 0$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$;

3) $G = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|c| = p$, $|a| = p^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $|b| = p^{\beta}$, $\beta > 0$, $[a, b] = c$, $[c, b] = 1$, $p(\alpha + \beta) > 4$;

4) *G – група з твердження 1.1.6, у якої* $\Phi(P) = 1$.

О з н а ч е н н я 1.1.3 (*означення 1.2.3 з* [62]). *УЩН[ ]-групою називається така група G, у якої для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A — власна немаксимальна підгрупа з B, існує нормальна підгрупа N із G і* $A \le N \le B$

Т в е р д ж е н н я 1.1.8 (*теорема 1.3.1 з* [62]). *Локально ступінчасті УЩН*[ ]*-групи Шмідта мають вигляд* $G = P \leftthreetimes Q$*, де* P *– нормальна в* G *силовська* p*-підгрупа порядку* $p^{\alpha} > 2$, $\alpha \in \{1,2,3\}$, $G' = P$, Q *– ненормальна циклічна силовська* q*-підгрупа з* G *порядку* q^{β}, $\beta > 0$, p *і* q *– різні прості числа,* $P' = \Phi(P) \leq Z(P)$, $|\Phi(P)| = p^{\Delta}$, $\Delta \in \{0,1\}$, $\alpha - \Delta$ *– показник* p *по модулю* q, $\Phi(P) \times Q$ *– максимальна підгрупа з* G, $Z(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q)$ *та вичерпуються групами таких типів:*

1) P *– група кватерніонів,* $q = 3 > \beta$;

2) $exp(P) = |\Phi(P)| = p > 3$, $q > 2$, $\beta = 1$;

3) P *– елементарна абелева група, при* $\alpha > 1$ $\alpha + \beta < 5$.

Т в е р д ж е н н я 1.1.9 (*наслідок 1.3.3 з* [62]). *Локально ступінчасті УЩН[ ]-групи Міллера-Морено вичерпуються групами типів:*

1) G *– група кватерніонів порядку 8;*

2) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$;

3) $G = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|c| = p$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $\alpha \in \{1, 2\}$, $\beta \in \{1, 2\}$, $p(\alpha+\beta) > 4$, $[a, b] = c$, $[c, b] = 1$;

4) $G = P \leftthreetimes Q$ *– група Шмідта типу 3 твердження 1.1.8.*

Т в е р д ж е н н я 1.1.10 (*наслідок 1.2.1 з* [62]). *Недедекіндова локально ступінчаста УЩН[ ]-група є розв'язною черніковською групою.*

Т в е р д ж е н н я 1.1.11 (*наслідок 2.2.7 з* [62]). *Комутант* G' *нільпотентної УЩН[ ]-групи є абелевою групою.*

Т в е р д ж е н н я 1.1.12 (*теорема 1.2.3 з* [62]). *Недедекіндові локально ступінчасті УЩН*[ ]*-групи* G *мають скінченний комутант, не мають підгруп, що розкладаються в прямий добуток більше ніж трьох неодиничних прямих множників і є черніковською дисперсивною групою одного з таких типів:*

1) G *– скінченна ненільпотентна група;*

2) *G – скінченна нільпотентна не більше ніж біпримарна група;*

3) *G має центральну квазіциклічну p-підгрупу R, для якої G/R – скінченна дедекіндова група.*

РОЗДІЛ II

БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ УЩН[$\overline{C}$]-ГРУП З ЦИКЛІЧНИМИ ЧИ МІНІМАЛЬНИМИ НЕЦИКЛІЧНИМИ ВЛАСНИМИ ПІДГРУПАМИ

У цьому розділі викладаються деякі результати про групи з умовами щільності нормальності для нециклічних підгруп. Завдяки проміжку (відрізок, інтервал, напівінтервал) вводиться вісім різних означень щільності і досліджуються властивості деяких з них (теорема 2.1.1). Наведено опис локально ступінчастих *УЩН*[$\overline{C}$]-груп з циклічними чи мінімальними нециклічними власними підгрупами (теорема 2.2.1).

2.1. Попередні результати

О з н а ч е н н я 2.1.1 (*означення 1.2.1 з* [62]**).** *Нехай G – група, A і B – її підгрупи,* $A \le B$. *Відрізком (інтервалом)* $[A;B]$ $((A;B))$ *називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G, для яких* $A \le X \le B$ $(A < X < B)$.

Напівінтервалом $(A;B]$ *чи* $[A;B)$ *називається множина всіх тих і тільки тих підгруп X із G, для яких* $A < X \le B$ *чи* $A \le X < B$.

Проміжком $\{A;B\}$ *називається відрізок, інтервал або напівінтервал.*

О з н а ч е н н я 2.1.2 (*означення 1.2.2 з* [62]**).** *Модулем проміжку* $|\{A;B\}|$ *називається число його елементів.*

О з н а ч е н н я 2.1.3. *Нехай у групі G для довільного відрізка* $[A;B]$, *де A та B – нециклічні підгрупи, існує нормальна підгрупа N із G така, що:*

1) *при* $|[A;B]| \geq 1$: 1.1) $N \in [A;B]$;

2) *при* $|[A;B]| > 1$: 2.1) $N \in (A;B]$; 2.2) $N \in [A;B)$; 2.3) $N \in [A;B]$;

3) *при* $|[A;B]| > 2$: 3.1) $N \in (A;B)$; 3.2) $N \in (A;B]$; 3.3) $N \in [A;B)$; 3.4) $N \in [A;B]$.

Тоді G називається відповідно: $Н(\overline{С})$- , $ЩН(\overline{С}]$- , $ЩН[\overline{С})$- , $ЩН[\overline{С}]$- , $УЩН(\overline{С})$- , $УЩН(\overline{С}]$- , $УЩН[\overline{С})$- , $УЩН[\overline{С}]$-*групою.*

Вісім класів визначених тут груп будемо позначати відповідно через $К(Н(\overline{С}))$, $К(ЩН(\overline{С}])$, $К(ЩН[\overline{С}))$, $К(ЩН[\overline{С}])$, $К(УЩН(\overline{С}))$, $К(УЩН(\overline{С}])$, $К(УШН[\overline{С}))$, $К(УЩН[\overline{С}])$.

Т е о р е м а 2.1.1. *Група G тоді і тільки тоді є* $Н(\overline{C})$*- групою, коли в ній нормальні всі нециклічні підгрупи.*

Для локально ступінчастих груп G наступні твердження еквівалентні:

а) G – $Н(\overline{C})$*-група;*

б) в G нормальні всі нециклічні підгрупи;

в) G – група одного з типів:

1) *G – дедекіндова група;*

2) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = p^{\alpha}$, $p^{\alpha} > 2$, $[\langle a\rangle, \langle b\rangle] = \langle a^{p\alpha-1}\rangle$;

3) $G = A \times B$, *A – група кватерніонів порядку 8, B – локально циклічна 2-група,* $|B| > 2$ *чи локально циклічна група без скруту, що містить таку підгрупу* $\langle b\rangle$, *для якої неодинична фактор-група* $B/\langle b\rangle$ *є квазіциклічною 2-групою ;*

4) $G = P \leftthreetimes \langle b\rangle$, $P = G'$, *P – силовська p-підгрупа з G типу (p, p), будь-який елемент із* $\langle b\rangle$ *індукує на P тотожний або незвідний автоморфізм,* $|b| < \infty$;

5) $G = P \leftthreetimes \langle b\rangle$, *P – група кватерніонів порядку 8, що є силовською 2-підгрупою з G,* $P = G'$, $|b| < \infty$;

6) $G = \langle z\rangle \times (\langle a\rangle \cdot \langle b\rangle)$, $\langle z\rangle$ – *скінченна холлівська підгрупа з* G, $|a| = 8$, $|b| = 4$, $a^4 = b^2$, $b^{-1}a\,b = a^{-1}$;

7) $G = \langle z\rangle \times ((C \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle)$, $\langle z\rangle$ – *скінченна холлівська підгрупа з* G, C – *локально циклічна p-група чи група кватерніонів порядку 8,* $|a| = |b| = |[a, b]| = p$, $[C, \langle b\rangle] = 1$;

8) $G = \langle z\rangle \times ((\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \cdot \langle b\rangle)$, $\langle z\rangle$ – *скінченна холлівська підгрупа з* G, $|c| = 3$, $|a| = |b| = 9$, $[a, b] = c$, $[c, b] = a^3 = b^6$;

9) $G = \langle z\rangle \times ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \cdot \langle x\rangle)$, $\langle z\rangle$ – *скінченна холлівська підгрупа з* G, $|a| = |b| = |x| = 4$, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2b^2$;

10) $G = \langle z\rangle \times ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle)(\langle x\rangle \times \langle y\rangle))$, $\langle z\rangle$ – *скінченна холлівська підгрупа з* G, $|a| = |b| = |x| = |y| = 4$, $a^2 = x^2 = [a, y]$, $a^2b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$;

11) $G = \langle z\rangle \times (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$, $\langle z\rangle$ – *скінченна холлівська підгрупа з* G, $|a| = |b| = 8$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

12) $G = \langle z\rangle \times ((\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle)\langle x\rangle)$, $\langle z\rangle$ – *скінченна холлівська підгрупа з* G, $|a| = 8$, $|x| = 4$, $|b| = 2$, $[a, x] = b$, $[a, b] = a^4 = x^2$, $[b, x] = 1$.

Доведення. За означенням 2.1.3 група G тоді і тільки тоді Н($\overline{C}$)-група, коли в ній нормальні всі нециклічні підгрупи. З цього випливає, що твердження а) і б) еквівалентні.

Покажемо, що еквівалентні твердження б) та в). Дійсно, нехай група G має властивість б). Покажемо, що тоді для G справедлива властивість в), тобто G – група одного з типів 1 – 12 згаданої властивості. Якщо G – дедекіндова група, то вона група типу 1. Нехай G – недедекіндова група. Зрозуміло, що тоді $G' \neq 1$.

Припустимо, що всі власні підгрупи із G циклічні. Тоді за твердженням 1.1.5 G – скінченна мінімальна нециклічна група. Оскільки G – недедекіндова група, то в силу відомого результату (див., наприклад, теорему 2.1.3 з [123]) G – група типу 2.

Нехай група G містить власні нециклічні підгрупи. Тоді завдяки [35, 36] G – $\overline{H}$-група. Тепер використовуючи опис $\overline{H}$-груп [35, 36] одержимо, що G – група одного з типів 2 – 12 розглядуваної теореми.

Отже, із властивості б) випливає властивість в).

Покажемо, що із властивості в) випливає властивість б), тобто, що група G одного із типів 1 – 12 локально ступінчаста і що в ній нормальні всі нециклічні підгрупи. Очевидно, що кожна група G із згадуваних типів груп розв'язна і, значить, локально ступінчаста. Покажемо, що в G нормальна будь-яка нециклічна підгрупа X. Для груп G типу 1 це очевидно. Нехай G – група типу 2. Тоді $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|a| = p^2$, $p^2 > 2$, $G' = \omega(\langle a \rangle)$. Оскільки X – нециклічна група, то $X \cap (\langle a \rangle) \neq 1$. Звідси $G' < X$ і тому $X \lhd G$, що й потрібно було довести.

Для груп G кожного з типів 3 – 12 властивість $X \lhd G$ установлена в [35, 36].

Отже властивість б) випливає із властивості в). Теорему доведено.

Л е м а 2.1.1. *Всі 8 класів груп введені в означенні 2.1.3 замкнені за підгрупами та фактор-групами і незамкнені за прямими добутками.*

Клас $H(\overline{C})$*-груп належить всім іншим 8 класам груп, а клас* $УЩН[\overline{C}]$*-груп містить всі інші 8 класів груп.*

Клас $ЩН(\overline{C})$*-груп належить перетину класів* $ЩН(\overline{C}]$ *- та* $ЩН[\overline{C})$*-груп, кожний з яких належить класу* $УЩН[\overline{C}]$*-груп.*

Клас $УЩН(\overline{C})$*-груп належить перетину класів* $УЩН(\overline{C}]$*- та* $УЩН[\overline{C})$*-груп, кожний з яких належить класу* $УЩН[\overline{C}]$*-груп.*

Доведення. Нехай G – група одного з 8 класів груп леми, X – довільна підгрупа з G і $A \leq X \leq B$, де A – нециклічна підгрупа. За умовою леми маємо нормальну підгрупу N з G, яка задовольняє відповідні співвідношення означення 2.1.3. Зрозуміло, що N □ X і тому всі класи груп замкнені за підгрупами.

Нехай $\overline{\boldsymbol{G}}$ – довільна фактор-група одного з розглядуваних класів груп, $\overline{\boldsymbol{A}} \leq \overline{\boldsymbol{B}} \leq \overline{\boldsymbol{G}}$, де $\overline{\boldsymbol{A}}$ – нециклічна підгрупа. Тоді $A \leq B \leq G$, де A і В – повні прообрази $\overline{\boldsymbol{A}}$ і $\overline{\boldsymbol{B}}$ в групі G відповідно і G – група одного з класів означення 2.1.3. За цим же означенням G має нормальну підгрупу N, яка задовольняє відповідні співвідношення даного означення. Зрозуміло, що образ $\overline{\boldsymbol{N}}$ в $\overline{\boldsymbol{G}}$ підгрупи N з G теж задовольняє співвідношення означення 2.1.3. Отже, всі розглядувані класи груп замкнені за фактор-групами.

Зрозуміло, що група кватерніонів восьмого порядку Q буде групою кожного з розглядуваного класу груп. Нехай $G = Q_1 \times Q_2 \times Q_3 \times Q_4 \times Q_5$, де $Q_i = <a_i, b_i>$ – група кватерніонів порядку 8, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Покладемо $d = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$. Тоді $/d/ = 4$, $d^2 = a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^2$. Нехай $A = <d> \times <a_1^2>$, $B = <d> \times <a_1^2> \times <a_2^2> \times <a_3^2> \times <a_4^2>$. Тоді $/[A; B]/ > 2$. Припустимо, що $[A; B]$ э N □ G. Зрозуміло, що $a_5^2 \notin N$. Ясно, що $[<d>, G] \leq N$. Звідси $[d, b_5] = a_5^2 \in N$, що неможливо. Отже, G не є УЩН[$\overline{\text{C}}$]-групою і тому жоден із розглядуваних класів груп не є замкненим за прямими добутками.

Інші твердження леми безпосередньо випливають з означення 2.1.3. Лему доведено.

З а у в а ж е н н я 2.1.1. *Нескінченні неабелеві групи з циклічними власними підгрупами, приклади яких побудовані Ольшанським О.Ю. [124, 125], є також групами з означення 2.1.3. Опис груп такого роду є окремою, самостійною і складною задачею. В зв'язку з цим в роботі введені класи груп розглядуються при додатковій умові локальної ступінчастості.*

Т в е р д ж е н н я 2.1.1. *Локально ступінчасті групи G з власними циклічними немаксимальними підгрупами вичерпуються групами таких типів:*

1) G – розв'язна група з циклічними власними підгрупами (G – група одного з типів 1 – 4 твердження 1.1.5);

2) $G = P \times Q$, P – квазіциклічна p-група, $|Q| = q$, p і q – різні прості числа;

3) G – скінченна група порядку pqr, що містить нециклічні підгрупи порядку pq, p, q, r – не обов'язково різні прості числа;

4) $G = \langle a, b\rangle$ – група кватерніонів порядку 2^4;

5) $G = P \leftthreetimes \langle x\rangle$, P – група кватерніонів порядку 8, $|x| = q$, q – непарне просте число;

6) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle x\rangle$, $|a| = pr$, $|x| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $[\langle a\rangle,\langle x\rangle] \neq 1$, $x^q \in Z(G)$, p і r – не обов'язково різні прості числа, q – просте число, $q \notin \pi(\langle a\rangle)$;

7) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle x\rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|x| = q^{\beta}$, $\beta > 2$, q – просте число, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle, \langle x^q\rangle] = \langle a\rangle$, $Z(G) = \langle x^q\rangle$;

8) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes Q$, $|a| = p$, p – непарне просте число, Q – група кватерніонів порядку 8, $[\langle a\rangle, Q] = \langle a\rangle$.

Дане твердження випливає з роботи Коваленка В.І. (Коваленко В.І. Деякі класи груп з метациклічними підгрупами //Вісник Чернігівського держ. пед. ун-ту.Сер. пед. науки.–2001.–Вип. 4.– С. 69 – 72).

Н а с л і д о к 2.1.1. *Локально ступінчасті групи G з власними циклічними немаксимальними підгрупами розв'язні і $G''' = 1$.*

Наслідок безпосередньо випливає з твердження 2.1.1.

2.2. УЩН$\left[\overline{C}\right]$-групи з циклічними чи мінімальними нециклічними власними підгрупами

Л е м а 2.2.1.. *Нескінченна локально ступінчаста група G, у якої всі власні немаксимальні підгрупи локально метациклічні, локально метациклічна.*

Доведення леми безпосередньо випливає з результатів роботи [126] .

Т е о р е м а 2.2.1. *Всі групи G, у яких будь-яка власна немаксимальна підгрупа циклічна чи мінімальна нециклічна, є УЩН[$\overline{C}$]-групами і локально ступінчасті групи такого роду вичерпуються групами типів:*

1) G – розв'язна група з циклічними власними немаксимальними підгрупами;

2) G – скінченна дисперсивна група порядку $pqrs$, що містить нециклічні підгрупи порядку pq, p, q, r, s – не обов'язково різні прості числа;

3) G – група кватерніонів порядку 2^5;

4) $G = P \leftthreetimes \langle x \rangle$, P – група кватерніонів порядку 2^3, $|x| = q$, q – непарне просте число;

5) $G = P \leftthreetimes X$, P – група кватерніонів порядку 8, $|X| = qr$, q, r – не обов'язково різні непарні прості числа, при $[P, X] = 1$ X – циклічна група;

6) $G = P \times Q$, P – квазіциклічна p-група, Q – циклічна група порядку qr, q і r – не обов'язково різні, відмінні від p, прості числа;

7) $G = A \leftthreetimes Q$, $|A| = p$ – непарне просте число, Q – група кватерніонів порядку 2^4, $[A, Q] = A$;

8) $G = A \leftthreetimes Q$, A – циклічна група порядку pr, p і r – не обов'язково різні непарні прості числа, Q – група кватерніонів порядку 8, $[A, Q] \neq 1$;

9) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|a| = p$ – непаре просте число, $|b| = q^{\beta}$, $\beta > 3$, $p \equiv 1 \pmod q$, $Z(G) = \langle b^{q^3} \rangle$;

10) $G = (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle) \times \langle x \rangle$, $|a| = p$ – непарне просте число, $|b| = q^{\beta}$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod q$, $|x| = r$ – просте число, відмінне від p та q, $Z(G) = \langle b^{q^2} \rangle \times \langle x \rangle$;

11) $G = (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle) \times \langle x \rangle$, $/a/ = p$ – непарне просте число, $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 1$, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$, $/x/ = rs$, r і s – не обов'язково різні, відмінні від p та q, прості числа, $Z(G) = \langle b^{q} \rangle \times \langle x \rangle$;

12) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $/a/ = pr$, p і r – не обов'язково різні непарні прості числа, $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$, $r \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = \langle b^{q^2} \rangle$;

13) $G = (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle) \times \langle x \rangle$, $/a/ = pr$, p і r – не обов'язково різні непарні прості числа, $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 1$, $/x/ = s$ – просте число, $s \neq q$, $Z(G) = \langle b^{q} \rangle \times \langle x \rangle$, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$, $r \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$, при $\beta > 2$ $s \neq p$ і $s \neq r$;

14) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $/a/ = prs$, p, r, s – не обов'язково різні непарні прості числа, $/b/ = q^{\beta}$, $\beta > 1$, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$, $r \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$, $s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$, $Z(G) = \langle b^{q} \rangle$;

15) $G \cong S_4$;

16) $G = A \cdot (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle)$, $A \triangleleft G$, A – група кватерніонів порядку 8, $/a/ = 3$, $/b/ \in \{4\}$, $b^{-1} a b = a^{-1}$, $A \leftthreetimes \langle a \rangle$ – група Шмідта, $A \langle b \rangle$ – група кватерніонів порядку 2^4;

17) $G = SL(2, 5)$ або $PSL(2, 5)$, чи $PSL(2, p)$, де $p > 11$, $p^2 + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5)$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 16)$, числа $p - 1$ та $p + 1$ не діляться на добуток чотирьох простих чисел;

18) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes (\langle b \rangle \times \langle x \rangle)$, $/a/ = p$, $/b/ = q^2$, $/x/ = r^2$, p, q, r – попарно різні прості числа, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r)$, $Z(G) = \langle b^{q} \rangle \times \langle x^{r} \rangle$.

Доведення. *Необхідність*. Нехай G – група, у якої всі власні немаксимальні підгрупи є циклічними чи мінімальними нециклічними. В подальшому таку групу будемо називати X-групою.

Покажемо, що X-група G є УЩН[$\overline{\mathrm{C}}$]-групою. Дійсно, нехай довільний відрізок підгруп задовольняє умову $\left|[A;\, B]\right| > 2$, де A – нециклічна підгрупа. Покажемо, що $[A;\, B]$ э N □ G. Якщо A □ G чи B □ G, то покладемо $A = N$ чи $B = N$ і все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \ntriangleleft G$, $B \ntriangleleft G$. Звідси $B < G$. Зрозуміло, що існує підгрупа C із співвідношенням $A < C < B$ і, значить, C – власна немаксимальна підгрупа з G. За умовою теореми всі власні підгрупи з C циклічні і тому A – циклічна група, що не так. Отже, завжди $[A;\, B]$ э N □ G. Звідси X-група G є УЩН[$\overline{\mathrm{C}}$]-групою.

Нехай далі G – локально ступінчаста X-група . Покажемо, що G – група одного з типів 1 – 18 розглядуваної теореми. Якщо в G циклічні всі власні немаксимальні підгрупи, то легко бачити, що вона група типу 1. Тому в подальшому G містить власні немаксимальні мінімальні нециклічні підгрупи.

Припустимо спочатку, що $/G/ = \infty$. Нехай $G' \neq 1$. Тоді завдяки лемі 2.2.1 G містить 2-породжену неабелеву метациклічну підгрупу H. Якщо G – нескінченно породжена група, то H може бути власною підгрупою деякої власної немаксимальної підгрупи з G. Звідси і за умовою теореми H – циклічна група, що не так. Отже, G – скінченно породжена група, яка внаслідок леми 2.2.1 метациклічна і тому за теоремою 1.2.1 з [56] $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, де $/a/ \cdot /b/ = \infty$ і $b^{-1} a\, b = a^{\kappa} \neq a$. З цього випливає, що в $\langle a \rangle$ можна вибрати такий елемент u, а в $\langle b \rangle$ – такий елемент v, що $\langle u \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle$ – неабелева група, яка є власною підгрупою деякої власної немаксимальної підгрупи з G, що неможливо. Отже, $G' = 1$.

Припустимо, що G – періодична група. Тоді при скінченності всіх силовських підгруп з G $/\pi(G)/ = \infty$, $G = A \times B$, де A та B – нескінченні локально циклічні і, значить, нециклічні підгрупи. Зрозуміло, що A – власна підгрупа деякої власної немаксимальної підгрупи з G і тому циклічна, що не так. Отже, G має нескінченну силовську p-підгрупу P. Звідси завдяки умові теореми, леми 2.2.1 і теореми 1.2 з [126] $G = P \times Q$, де P – квазіциклічна група, Q – її холлівське доповнення. За умовою теореми P не може бути власною підгрупою жодної з власних немаксимальних підгруп групи G і тому Q – скінченна група, порядок якої не ділиться на добуток трьох простих чисел. Ясно, що Q – циклічна група. Оскільки G не є групою типу 1, то $/ Q / = qr$, де q і r – не обов'язково різні прості числа. Звідси G – група типу 6.

Нехай тепер G – неперіодична група. Оскільки G не є групою типу 1, то вона нециклічна. Тоді завдяки теоремі 1.2 з [126] в G існує такий елемент нескінченного порядку g, що $G /<g>$ – періодична нескінченно породжена локально циклічна група. Зрозуміло, що $G /<g>$ – група типу 1 чи 6 розглядуваної теореми. Звідси $G /<g>$ містить квазіциклічну p-підгрупу $P/<g>$ і тому P – локально циклічна група без скруту. Але тоді для будь-якого простого $q \neq p$ підгрупа $D = P^{q^4}$ – нециклічна і має в P індекс q^4. Звідси D – власна підгрупа деякої немаксимальної підгрупи з G і, значить, циклічна. Суперечність. Отже, G не може бути неперіодичною групою.

Таким чином, випадок, коли $/ G / = \infty$, розглянутий повністю.

Нехай далі $/G/ < \infty$. Тоді внаслідок надрозв'язності скінченної мінімальної нециклічної в G всі 2-максимальні підгрупи надрозв'яні. Звідси і внаслідок дисперсивності скінченної групи G, у якій всі власні підгрупи надрозв'язні [123, теорема 5.4.3,] одержуємо, що G – дисперсивна чи мінімальна недисперсивна група.

Якщо $/G/$ не ділиться на добуток чотирьох простих чисел, то в G циклічна всяка 2-максимальна підгрупа і, значить, G – група типу 1.Нехай $/G/$ ділиться на добуток чотирьох простих чисел. Можливі випадки: 1) G – недисперсивна група; 2) G – дисперсивна група.

Випадок 1. У цьому випадку G – мінімальна недисперсивна група. Припустимо спочатку, що G – розв'язна група.

Нехай жодна силовська підгрупа з G не належить G'. Тоді G задовольняє умову теореми 2.2.4 з [123] і тому G містить ненадрозв'язну групу Шмідта $S = A \leftthreetimes \langle b \rangle$, що є власною немаксимальною підгрупою з G, де A – силовська p-підгрупа з S, $\langle b \rangle$ – силовська q-підгрупа з S. За умовою теореми A – циклічна група. Але тоді S – надрозв'язна група, що не так. Отже, G' містить хоча б одну силовську підгрупу з G і тому G задовольняє умову теореми 2.2.2 з [123]. За твердженнями цієї теореми $G = AD$, $A \triangleleft G$, A – нециклічна p-підгрупа, $D = Q \leftthreetimes \langle b \rangle$, $/ b / = p^{\beta}$, $\beta > 0$, Q – силовська q-підгрупа з G, p і q – різні прості числа, $A \cap \langle b \rangle \le \Phi(A) \le Z(G)$, $[A, \langle b \rangle] \not\le \Phi(A)$, $C_D(A) \le \Phi(Q) \times \langle b^q \rangle$, D/Φ – група Шмідта. Зрозуміло, що A – нециклічна власна немаксимальна підгрупа з G. Тоді вона 2-максимальна підгрупа з G, що є мінімальною нециклічною групою і тому A – група типу (p, p) або A – група кватерніонів порядку 8. Оскільки A – 2-максимальна підгрупа з G і $A \leftthreetimes Q \neq G$, то $/Q/ = q$ і, значить, $\Phi(Q) = 1$ і тому D – група Шмідта. Отже, $Q = \langle a \rangle$, $/ a / = q$, $D = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$ і, значить, $q \equiv 1 (mod\ p)$, $q > p$.

Ясно, що A – максимальна підгрупа силовської p-групи $P = A\langle b \rangle$. Звідси $[P : A] = p$ і, значить, $A \cap \langle b \rangle = \langle b^p \rangle \le \Phi(A)$, $/\Phi(A)/ \le 2$. З умови $C_Q(A) \le \Phi(Q) = 1$ маємо, що $A \leftthreetimes \langle a \rangle = S$ – ненільпотентна група, у якої A – 2-породжена силовька p-підгрупа, $\langle a \rangle$ – силовська q-підгрупа, $q > p$.

Нехай M – підгрупа Шмідта з S. Тоді без порушення загальності можна вважати, що $M = A_1 \leftthreetimes \langle a \rangle$, де $A_1 \triangleleft M$, A_1 – силовська p-підгрупа з M. При $q > p$ показник p за модулем q більший 1. Але тоді за твердженням 2.1.1

з [123] $A_1/\Phi(A_1)$ – елементарна абелева група, порядок якої не менше ніж p^2. Звідси $A_1 = A$ і тому S – група Шмідта.

Якщо A – група типу (p, p), то $p^2 \equiv 1(mod\ q)$, q ділить $p + 1$, і при $q > p$ $p = 2$, $/b/ = 2$, $q = 3$ і тоді G – група типу 15.

Нехай A – група кватерніонів порядку 8. Тоді $q = 3$, $/b/ \in \{2, 4\}$, $[A, <b>] \nless \Phi(A)$. З останього співвідношення маємо, що силовська 2-підгрупа $P = A<b>$ порядку 2^4 і тому завдяки теоремі 12.5.1 з [119] вона група кватерніонів. Зрозуміло, що $b^2 \in Z(G)$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ і G – група типу 16.

Нехай тепер G – нерозв'язна група. Тоді $\Phi(G)$ – нільпотентна власна немаксимальна підгрупа з G. Зрозуміло, що G має власні неметациклічні підгрупи, G – ненадрозв'язна, а всі її 2-максимальні підгрупи метациклічні. Звідси G задовольняє умову твердження 1.1.3 і може бути лише групою типу 11 цього твердження, тобто $G \cong SL(2, p)$ чи $G \cong PSL(2, p)$, де $p = 5$ чи $p \geq 13$, $p^2 + 1 \equiv 0\ (mod\ 5)$, $p^2 - 1 \not\equiv 0\ (mod\ 16)$. При $p = 5$ G – група типу 17.

Нехай $p > 5$. Тоді $p > 11$. Нехай спочатку $G \cong PSL(2, p)$. Тоді за теоремою Діксона (див., наприклад, [127, теорема 8.2.7]) G має максимальні підгрупи $M_1 \cong <a> \leftthreetimes <b>$ – група Фробеніуса, $/a/ = p$, $/b/ = (p - 1)/2$, $M_2 \cong <b> \leftthreetimes <d>$ – група діедра, $/d/ = 2$, $M_3 \cong <c> \leftthreetimes <d>$ – група діедра, $/c/ = (p + 1)/2$.

Нехай q – просте число, що ділить $(p - 1)/2$. Тоді в M_1 існує підгрупа Фробеніуса і, значить, нециклічна підгрупа $K_1 = <a> \leftthreetimes <u>$, де $/u/ = q$, $u \in <b>$. Звідси $K_1 = M_1$ або K_1 – максимальна підгрупа надрозв'язної групи M_1, і тому $[M_1 : K_1]$ не ділиться на добуток двох простих чисел. Отже, $[M_1 : K_1] = [<b> : <u>]$ і тому $p - 1$ не ділиться на добуток чотирьох простих чисел.

Нехай r – просте число, що ділить $(p + 1)/2$. Тоді в M_3 існує підгрупа діедра і, значить, нециклічна підгрупа $K_3 = \langle v\rangle \leftthreetimes \langle d\rangle$, де $v \in \langle c\rangle$, $|v| = r$. Звідси $K_3 = M_3$ або K_3 – максимальна підгрупа з M_3 і в надрозв'язній групі M_3 $[M_3 : K_3] = [\langle c\rangle : \langle v\rangle]$ не ділиться на добуток двох простих чисел. З цього виплипає, що $p + 1$ не ділиться на добуток чотирьох простих чисел і тому G – група типу 17.

Нехай $G \cong SL(2, p)$. Тоді $Z(G)$ містить елемент f, $|f| = 2$, $G/\langle f\rangle \cong PSL(2, p)$, $G/\langle f\rangle$ містить максимальні підгрупи $M_1/\langle f\rangle$, $M_2/\langle f\rangle$ і $M_3/\langle f\rangle$, що мають наведену вище будову. Оскільки $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$, то силовські 2-підгрупи з G ізоморфні силовським 2-підгрупам з M_i $(i = 2, 3)$ і ізоморфні групам кватерніонів порядку 8. Звідси $M_1 = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b_1\rangle$, $|b_1| = p - 1$, $M_2 = \langle b_1\rangle\langle d_2\rangle = \langle b_3\rangle \leftthreetimes Q$, $Q = \langle b_2\rangle\langle d_2\rangle$ – група кватерніонів порядку 8, $\langle b_2\rangle$ – силовська 2-підгрупа з $\langle b_1\rangle$, $\langle b_3\rangle$ – її холлівське доповнення в $\langle b_1\rangle$, $M_3 = \langle c_1\rangle\langle d_2\rangle = \langle c_3\rangle \leftthreetimes Q_1$, де $Q_1 = \langle c_2\rangle\langle d_2\rangle$ – група кватерніонів порядку 8, $\langle c_2\rangle$ – силовська 2-підгрупа з $\langle c_1\rangle$, $\langle c_3\rangle$ – її холлівське доповнення в $\langle c_1\rangle$. Зрозуміло, що підгрупа $\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b_3\rangle$ не може бути максимальною підгрупою в M_3 і, значить, вона циклічна. Оскільки $M_3/\langle f\rangle$ – група Фробеніуса, то $b_3 = 1$ і тому $\langle b_1\rangle = \langle b_2\rangle$, $|b_1| = 4$, $p - 1 = 4$. Але тоді $p = 5$, що неможливо. Випадок 1 розглянули повністю.

Випадок 2. У цьому випадку G – дисперсивна група. Якщо $|G| = pqrs$, то G – група типу 2. Нехай далі $|G|$ ділиться на добуток п'яти простих чисел.

Припустимо спочатку, що всі силовські підгрупи з G циклічні. Тоді завдяки теоремі 12.5.1 з [119] $G = \langle u\rangle \leftthreetimes \langle v\rangle$, де $\langle u\rangle$ і $\langle v\rangle$ – холлівські підгрупи з G, $\langle u\rangle = G'$. Оскільки G містить нециклічну 2-максимальну підгрупу X, то $G' \neq 1$. Зрозуміло, що $X = \langle c\rangle \leftthreetimes \langle d\rangle$, де $\langle c\rangle = X \cap \langle u\rangle$ і без порушення загальності можна вважати, що $\langle d\rangle = X \cap \langle v\rangle$. Звідси X – група типу 4 твердження 1.1.5, внаслідок якого $|c| = p$, $|d| = q^{\gamma}$, $\gamma > 0$, p і q – різні прості числа, $p \equiv 1 \pmod q$, $Z(X) = \langle d^q\rangle$, $X' = \langle c\rangle$. Оскільки X – 2-максимальна підгрупа надрозв'язної групи G, то як відомо $[G : X]$ – добуток двох простих чисел.

Нехай $\langle b\rangle$ – силовська q-підгрупа з $\langle v\rangle$. Тоді $d \in \langle b\rangle$, $|b| = q^{\beta}$, $\beta > 1$. Ясно, що $\langle v\rangle = \langle b\rangle \times \langle x\rangle$, де $\langle x\rangle$ – холлівське доповнення $\langle b\rangle$ в $\langle v\rangle$. Оскільки $d \in \langle b\rangle$, то $|x|$ не ділиться на добуток трьох простих чисел. Не порушуючи загальності можна вважати, що $d = b^{q^{\Delta}}$, $\square \geq 0$ і $\langle b^{q^{\Delta+1}}\rangle = Z(X)$. Зрозуміло, що $[\langle u\rangle : \langle c\rangle]$ не ділиться на добуток трьох простих чисел.

Нехай $[\langle u\rangle : \langle c\rangle] = 1$. Тоді $\langle u\rangle = \langle c\rangle = G'$. Покладемо $G' = \langle a\rangle$. Тоді $|a| = p$, $X = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle d\rangle$, $G = \langle a\rangle \leftthreetimes (\langle b\rangle \times \langle x\rangle)$, $[G : \langle x\rangle] = rs$, r і s – не обов'язково різні прості числа, $r \neq p$, $s \neq p$. Припустимо, що $\Delta = 0$. Тоді $\beta = \gamma$, $b^q \in Z(G)$, $|X| = rs$. Оскільки $|G|$ ділиться на добуток п'яти простих чисел, то $\beta > 1$ і, значить, $\langle a\rangle \leftthreetimes \langle x\rangle$ – циклічна чи мінімальна нециклічна група. Звідси $[\langle a\rangle, \langle x\rangle] = 1$ або $r = s$, або $[\langle a\rangle, \langle x\rangle] = \langle a\rangle$, $p \equiv 1 \pmod r$, $x^r \in Z(G)$.

Нехай $[\langle a\rangle, \langle x\rangle] = 1$. Тоді $G = (\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle) \times \langle x\rangle$ і тому G – група типу 11 розглядуваної теореми.

Нехай $[\langle a\rangle, \langle x\rangle] \neq 1$. Тоді $\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$ – мінімальна нециклічна група, яка при $\beta > 1$ може бути лише 2-максимальною. Звідси $\beta = 2$ і G – група типу 18.

Припустимо, що $\Delta = 1$. Тоді $\beta > 1$, $[G : X] = qr$, r – просте число, $r \neq q$, $r \neq p$, $|x| = r$. Оскільки $|G|$ ділиться на добуток п'яти простих чисел, то $\beta > 2$, $b^{q^2} \in Z(X)$ і $A \leftthreetimes \langle x\rangle$ – циклічна чи мінімальна нециклічна група. Звідси $[a, x] = 1$ і $G = (\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle) \times \langle x\rangle$ – група типу 10 теореми.

Припустимо тепер, що $\Delta > 1$. Тоді $[G : X] = q^2$ і, значить, $\Delta = 2$, $/ x / = 1$. Звідси $A = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^{q^3} \rangle$, $\beta > 3$ і G – група типу 9 теореми.

Отже, випадок $[\langle u \rangle : \langle c \rangle] = 1$ розглянутий повністю.

Нехай далі $[\langle u \rangle : \langle c \rangle] = r$. Тоді $/ u / = pr$, $[\langle v \rangle : \langle d \rangle] = s$. Припустимо, що $\Delta = 0$. Тоді $/ x / = s$, $b^q \in Z(X)$, $\beta > 1$. Звідси $\langle c \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle$ – власна підгрупа деякої 2-максимальної підгрупи з G і, значить, $[c, x] = 1$. При $r = p$ $[u, x] = 1$. Покладено $u = a$. Тоді $G = (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle) \times \langle x \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle \times \langle x \rangle$ і G – група типу 13 розглядуваної теореми. При $p \neq r$ $\langle u \rangle = \langle y \rangle \times \langle c \rangle$, де $\langle y \rangle$ – силовська r-підгрупа з $\langle u \rangle$. Зрозуміло, що $\langle y \rangle \lhd G$, $\langle y \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle$ – циклічна група. Звідси $[y, x] = 1$, $x \in Z(G)$ і знову G – група типу 13.

Нехай $\Delta > 0$. Тоді $[\langle v \rangle : \langle d \rangle] = q$, $\langle b^{q^2} \rangle = Z(X)$, $\beta > 2$, $/ x / = 1$. Покладемо $u = a$ і одержимо, що $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$. При $p = r$ $[a, b^{q^2}] = 1$ і, значить, $Z(G) = \langle b^{q^2} \rangle$ і тому G – група типу 12. Нехай $p \neq r$. Тоді $\langle a \rangle = \langle y \rangle \times \langle c \rangle$, $\langle y \rangle = r$, $\langle y \rangle \lhd G$. Якщо $\langle y \rangle \leftthreetimes \langle b^{q^2} \rangle$ – нециклічна група, то вона 2-максимальна підгрупа з G, що неможливо. Отже, $Z(G) = \langle b^{q^2} \rangle$ і G – група типу 12. Випадок $[\langle u \rangle : \langle c \rangle] = r$ розглянутий повністю.

Нехай, нарешті, $[\langle u \rangle : \langle c \rangle] = rs$. Оскільки X – 2-максимальна підгрупа з G, то $\langle v \rangle = \langle d \rangle = \langle b \rangle$. Покладемо $u = a$. Тоді $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$. Легко показати, що $\langle b^q \rangle = Z(G)$. Отже, G – група типу 14 розглядуваної теореми. Випадок, коли всі силовські підгрупи з G циклічні розглянутий повністю.

Нехай тепер G містить нециклічну силовську p-підгрупу P. Розглянемо можливі випадки: 2.1) G – надрозв'язна група; 2.2) G – ненадрозв'язна група.

Випадок 2.1. Припустимо, що P містить підгрупу N типу (p, p). Оскільки G містить 2-максимальні нециклічні підгрупи, то N – максимальна чи 2-максимальна підгрупа з G. Але тоді в надрозв'язній групі G індекс $[G : N]$ не ділиться на добуток трьох простих чисел і, значить, $/G/$ не ділиться на добуток п'яти простих чисел, що суперечить нашому припущенню. Отже, завдяки теоремі 12.5.1 [119] P – група кватерніонів порядку 2^{γ}, $\gamma > 2$.

При $\gamma > 5$ P містить групу кватерніонів M порядку 8, яка міститься в деякій 3-максимальній підгрупі з G, що неможливо. Отже, $\gamma < 6$.

Нехай $\gamma = 5$. Тоді M – 2-максимальна підгрупа з P. Але тоді в надрозв'язній групі G $P = G$ і G – група типу 3 теореми. Нехай $\gamma < 5$. Тоді $G = X \leftthreetimes P$, де X – холлівська підгрупа з G непарного порядку, порядок якої не ділиться на добуток трьох простих чисел. Оскільки $/P/ > 4$, то X – підгрупа деякої 3-максимальної підгрупи з G і, значить, циклічна. Звідси $X = \langle x \rangle$. Якщо $/x/$ – просте число, то $\gamma = 4$ і G – група одного з типів 4, 7 теореми. Нехай $/x/$ – не просте число. Тоді P – група кватерніонів порядку 8 і G – група одного з типів 5, 8 теореми. Випадок 2.1 розглянутий повністю.

Випадок 2.2. У цьому випадку G задовольняє умову твердження 1.1.3 і може бути лише групою одного з типів 1 – 11 згаданого твердження. Оскільки G – дисперсивна група, то вона може бути лише групою одного з типів 1 – 8 даного твердження. За припущенням про порядок групи G вона не може бути групою типу 1; 2, при $\beta = 2$; 3, при $/P/ = p^3$; 6, при $/Q/ = q$; 8.

Нехай G – група типу 2 твердження 1.1.3. Тоді $G = P \leftthreetimes Q$, P – мінімальна нормальна підгрупа з G, $/P/ = p^2$, Q – циклічна q-група, $/Q/ = q^{\beta}$, $\beta > 2$. Оскільки P – нециклічна, то P – 2-максимальна підгрупа з G і, значить, $[G : P] = q^2$, що неможливо.

Нехай G – група типу 3. Тоді $G = P \leftthreetimes Q$, $/P/ > p^3$, $P = \langle c \rangle P_1$, $c \in Z(G)$, $c^p \in \Phi(P_1)$, P_1 – група кватерніонів чи $/P_1/ = p^2$, $/Q/ = q$, $P_1 \leftthreetimes Q$ –

група Шмідта. Звідси P_1 – група кватерніонів. Але тоді P містить підгрупу типу $(2, 2)$, що не є 2-максимальною підгрупою з G. Суперечність. Отже, група G не може бути групою типу 3.

Нехай G – група типу 4 твердження 1.1.3. Тоді G містить підгрупу N типу (p, p), що належить деякій 3-максимальній підгрупі з G, що неможливо.

Нехай G – група типу 5. Тоді $G = P \leftthreetimes Q$, P – група кватерніонів чи елементарна абелева група порядку p^2, Q – нециклічна q-група, $/Q/ > q$. Зрозуміло, що P – нециклічна власна немаксимальна підгрупа з G. Звідси P – 2-максимальна підгрупа з G, що є мінімальною нециклічною групою. Отже, $\beta = 1$, P – група кватерніонів і G – група типу 5 розглядуваної теореми.

Нехай G – група типу 6 твердження 1.1.3. Тоді $G = P \leftthreetimes (Q \leftthreetimes R)$, P – мінімальна нормальна підгрупа з G, $/P/ = p^2$, $P = \langle x\rangle \times \langle y\rangle$, $\langle x\rangle \leftthreetimes Q$ і $\langle y\rangle \leftthreetimes Q$ – групи Міллера-Морено, $/R/ = r$, $[Q, R] = Q$, $1 < [P, R] < P$. Зрозуміло, що $P \leftthreetimes R$ – власна нециклічна підгрупа з G, яка не може бути мінімальною нециклічною групою і, значить, вона максимальна в G. Звідси $/Q/ = q$, що неможливо.

Нехай G – група типу 7 твердження 1.1.3. Тоді $G = (R \times P) \leftthreetimes Q$, P – група кватерніонів чи $/P/ = p^2$, $P \leftthreetimes Q$ – група Шмідта, $/R/ = r$ або r^2, якщо $/R/ = r^2$, то $P \leftthreetimes Q$ – група Шмідта. Оскільки R – підгрупа деякої 3-максимальної підгрупи з G, то $/R/ = r$ і оскільки $/G/$ ділиться на добуток п’яти простих чисел, то P – група кватерніонів. Отже, $G = P \leftthreetimes X$ – група типу 5 розглядуваної теореми, де $X = R \leftthreetimes Q$. Всі випадки розглянули. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G – група, у якої всі власні немаксимальні підгрупи циклічні чи мінімальні нециклічні. Покажемо, що G – УЩН[$\overline{C}$]-

група. Для цього досить показати, що для будь якого відрізка підгруп $[A ; B]$, де A – нециклічна підгрупа, $\left|[A ; B]\right| > 2$ має місце співвідношення $[A ; B] \ni N \lhd G$. Дійсно, якщо $B = G$, то покладемо $N = B$ і все доведено. Тому нехай $B < G$. За припущенням A – власна немаксимальна підгрупа з B і, значить, циклічна. Суперечність, яка показує, що G – УЩН $[\overline{C}]$-група.

Нехай далі G – група одного з типів 1 – 18 теореми. Тоді, очевидно, G – розв'язна і, значить, локально ступінчаста група. Для завершення доведення достатності залишається показати, що в G всяка власна немаксимальна підгрупа X є циклічною чи мінімальною нециклічною групою. В групі G типу 1 всі власні немаксимальні підгрупи циклічні, тому далі розглянемо групи типів 2 – 18 теореми. Завдяки результатам з [123, § 5.3] легко отримати, що всі 3-максимальні підгрупи групи G циклічні. Звідси випливає, що X – циклічна чи мінімальна нециклічна група. Достатність доведено. Теорему доведено.

Р О З Д І Л І І І

БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ НЕДИСПЕРСИВНИХ УЩН[$\overline{C}$]-ГРУП

Розділ III повністю присвячений опису локально ступінчастих недисперсивних УЩН[$\overline{C}$]-груп та їх підкласів (теореми 3.1.1, 3.1.3, 3.2.2, 3.2.3)

3.1. Недисперсивні УЩН[$\overline{C}$]-групи

О з н а ч е н н я 3.1.1 *(див., наприклад,* [123]*). Група G називається дисперсивною, якщо вона має силовський ряд , тобто ряд нормальних в G підгруп* $1 = G_0 \le G_1 \le \ldots \le G_i \le G_n = G$ *таких, де n – ціле невід'ємне число, що при n = 0 G = 1, при n = 1 G – p-група, при n > 1,* $0 < i < j \le n$, G_i/G_{i-1} – p_i *-група,* G_j/G_{j-1} – p_j*-група ,* p_i *та* p_j *– різні прості числа.*

При цьому число n називається довжиною силовського ряду.

О з н а ч е н н я 3.1.2 *(див., наприклад,* [123]*). Якщо група G не має силовського ряду, то вона називається недисперсивною*.

О з н а ч е н н я 3.1.3 *(див., наприклад,* [123]*). Недисперсивна група, у якій всі власні підгрупи дисперсивні, називається мінімальною недисперсивною групою.*

О з н а ч е н н я 3.1.4 *(див., наприклад,* [123]*). Локально дисперсивною групою називається група, у якої дисперсивні всі скінченно породжені підгрупи.*

З наведених означень випливає

Н а с л і д о к 3.1.1. *Всі дисперсивні, мінімальні недисперсивні та локально дисперсивні групи періодичні.*

Л е м а 3.1.1. *Локально ступінчасті УЩН[$\overline{\mathrm{C}}$]-групи Шмідта мають вигляд* $G = P \leftthreetimes Q$, *де* P *– нормальна в* G *силовська* p*-підгрупа порядку* $p^{\alpha} > 2$, $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$, $G' = P$, Q *– ненормальна циклічна силовська* q*-підгрупа з* G *порядку* q^{β}, $\beta > 0$, p *і* q *– різні прості числа,* $\boldsymbol{P'} = \Phi(P) \leq Z(P)$ $|\Phi(P)| = p^{\Delta}$, $\Delta \in \{0,1\}$, $\alpha - \Delta$ *– показник* p *по модулю* q, $\Phi(P) \times Q$ *– максимальна підгрупа з* G, $Z(G) = \Phi(P) \times \Phi(Q)$ *та вичерпуються групами типів:*

1) $\boldsymbol{P'} = \Phi(P) = 1$;

2) $|\Phi(P)| = |\boldsymbol{P'}| = p$, $\alpha = 3$.

Доведення *. Необхідність.* Нехай G задовольняє умови леми. Відомо [122], що локально ступінчасті групи Шмідта скінченні. Звідси і завдяки твердженню 1.1.8 можна вважати, що $\alpha \geq 3$. Можливі випадки : 1) $\boldsymbol{P'} = 1$; 2) $\boldsymbol{P'} \neq 1$.

Випадок 1. У цьому випадку P – мінімальна нормальна підгрупа з G. Припустимо, що $\alpha > 4$. Тоді існує такий відрізок підгруп $[A; B]$, що $|[A; B]| > 2$, $|A| = p^2$, $|B| = p^4$, $B < P$. За означенням УЩН[$\overline{\mathrm{C}}$]-груп $[A; B] \ni N \trianglelefteq G$, що суперечить мінімальності нормальності P в G. Отже, $\alpha \leq 4$ і G – група типу 1.

Випадок 2. У цьому випадку завдяки лемі 2.1.1 $G/\boldsymbol{P'}$ – група типу 1 розглядуваної леми. Звідси $\alpha - \Delta \in \{1,2,3,4\}$. При $\alpha - \Delta \in \{1,3\}$ $\boldsymbol{P'} = 1$, що не так. Тому в подальшому будемо вважати, що $\alpha - \Delta \in \{2,4\}$.

Нехай $\alpha - \Delta = 2$. Тоді за властивістю груп Шмідта (див., наприклад, твердження1.1.6) $\Delta = 1$ і G – група типу 2 розглядуваної леми.

Нехай тепер $\alpha - \Delta = 4$. Можливі випадки: 2.1) $P\backslash\Phi(P)$ містить елемент a, порядок якого дорівнює p; 2.2) для будь-якого елемента a з $P/\Phi(P)$ $|a| > p$.

Випадок 2.1. У цьому випадку і завдяки твердженню 1.1.6 $exp(P) = p$. Звідси G містить відрізок підгруп $[A; B]$ такий, що $|[A; B]| > 2$, $|A| > p$, $B < P$, $\Phi(A) < A$ і A – нециклічна підгрупа. За означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[A; B] \ni N \trianglelefteq G$. Ясно, що $\Phi(P) < N$ і $N/\Phi(P)$ – неодинична нормальна підгрупа з $G/\Phi(P)$, яка строго належить $P/\Phi(P)$, що неможливо. Отже, випадок 2.1 неможливий.

Випадок 2.2. У цьому випадку $p = 2$, $P/\Phi(P)$ містить елемент a порядку 4. Якщо $A = \Phi(P) \cdot \langle a \rangle$ – нециклічна підгрупа, то G містить відрізок підгруп $[A; B]$ такий, що $|[A; B]| > 2$. Тоді, як у випадку 2.1, одержуємо суперечність. Отже, $A = \Phi(P) \cdot \langle a \rangle$ – циклічна підгрупа і тому $A = \langle a \rangle$, $|\Phi(P)| = 2$, $\Delta = 1$. Звідси P – група з однією циклічною підгрупою порядку p. В силу теореми 12.5.1 з [119] P містить елемент f порядку $2^{\alpha - 1} = 2^4$, що в групах Шмідта неможливо. Отже, і цей випадок неможливий. Всі випадки розглянуті. Необхідність доведено.

Достатність очевидна. Лему доведено.

Л е м а 3.1.2. *Локально ступінчасті УЩН$\left[\overline{C}\right]$-групи Міллера-Морено вичерпуються групами типів:*

1) G – група кватерніонів порядку 8;

2) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $\alpha > 1, \beta > 0$, $[a, b] = a^{p^{\alpha-1}}$;

3) $G = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, $|c| = p$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $\alpha \in \{1, 2\}$, $\beta \in \{1, 2\}$, $p(\alpha+\beta) > 4$, $[a, b] = c$, $[c, b] = 1$;

4) $G = P \rtimes Q$ – група Шмідта типу 1 леми 3.1.1.

***Доведення**. Необхідність.* Припустимо спочатку, що G – нільпотентна група. За відомими результатами (див., наприклад, твердження 1.1.7) G – скінченна примарна p-група типу 1, 2 розглядуваної леми, і типу $G = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, $|c| = p$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $p(\alpha + \beta) > 4$, $[a, b] = c$, $[c, b] =$

1. Зрозуміло, що $Z(G) = \langle c\rangle \times \langle a^p\rangle \times \langle b^p\rangle$. Якщо $\alpha \in \{1, 2\}$, $\beta \in \{1, 2\}$, то G – група типу 3 розглядуваної леми.

Без порушення загальності можна вважати, що $\alpha \geq \beta$. Припустимо, що $\alpha > 2$. Покладемо $B = \langle a^p\rangle \times \langle b\rangle$, $A = \omega(\langle a\rangle) \times \langle b\rangle$. Ясно, що $|[A; B]| > 2$. За означенням УЩН[$\overline{\mathrm{C}}$]-груп $[A; B] \ni N \trianglelefteq G$. Тоді $G' \cap N = 1$, $N \leq Z(G)$ і, значить, $b \in Z(G)$, що не так. Отже, якщо G – нільпотентна група, то вона група типу 1– 3 розглядуваної леми.

Припустимо тепер, що G – ненільпотентна група. Тоді завдяки лемі 3.1.1. G – група Шмідта типу 1 цієї леми і, значить, G – група типу 4 даної леми. Необхідність доведено.

Достатність випливає з леми 3.1.1 і твердження 1.1.9. Лему доведено.

Л е м а 3.1.3. *Скінченні розв'язні мінімальні недисперсивні УЩН*[$\overline{\mathrm{C}}$]-*групи, комутант яких містить хоча б одну силовську підгрупу групи G, мають вигляд* $G = A \cdot D$, $A \trianglelefteq G$, $D = Q \leftthreetimes \langle b\rangle$ *– група Міллера-Морено, Q – група порядку 3 та є групами одного з типів:*

1) $G = A \leftthreetimes D$, *A – група типу (2, 2),* $Q = \langle c\rangle$, $A \leftthreetimes \langle b\rangle$ *та* $A \leftthreetimes \langle c\rangle$ *– групи Міллера-Морено,* $|b| \in \{2, 4\}$;

2) $G = A \cdot D$, *A – група кватерніонів порядку 8,* $\Phi(A) = \Phi(\langle b\rangle)$, $A \cdot \langle b\rangle$ *– група кватерніонів порядку* 2^4, $Q = \langle c\rangle$, $|b| = 4$, $A \leftthreetimes \langle c\rangle$ *– група Шмідта.*

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Оскільки G' містить хоча б одну силовську підгрупу з G, то завдяки теоремі 2.2.3 з [123] $G = A \cdot D$, де $\Phi(A)$ – центральна в G елементарна абелева p-підгрупа, $A/\Phi(A)$ – мінімальна нормальна p-підгрупа з $G/\Phi(A)$, $D = Q \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|b| = p^\beta$, $\beta > 0$, Q – ненормальна в G силовська q-підгрупа групи G, $A\langle b\rangle = P$ – ненормальна в G силовська p-підгрупа, $p \neq q$, $A \cap \langle b\rangle \leq \Phi(A)$, $b^p \in Z(G)$, $[A, \langle b\rangle] \not\leq \Phi(A)$, $[Q, \langle b\rangle] = Q$, $D/\Phi(Q)$ – ненільпотентна група Міллера-Морено, $\boldsymbol{C_D}(A) =$

$C_{\Phi(Q)}(A) \times \langle b^p \rangle$, $[A, Q] = A$, $[\Phi(Q) : C_{\Phi(Q)}(A)] \leq 2$. Легко бачити , що $G/\Phi(A)$ – група, що задовольняє умову розглядуваної леми. Розглянемо далі два можливі випадки: 1) $\Phi(A) = 1$; 2) $\Phi(A) \neq 1$.

Випадок 1. У цьому випадку $P = A \leftthreetimes \langle b \rangle$. Зрозуміло, що $N_P(\langle b \rangle) > \langle b \rangle$. Тоді підгрупа A містить такий елемент a, що $|a| = p$, $[a, b] \in A \cap \langle b \rangle = 1$. Звідси в G існує підгрупа $U = \langle b \rangle \times \langle a \rangle$, у якої $\omega(U) = \langle a \rangle \times \omega(\langle b \rangle)$ – нециклічна підгрупа. Ясно, що $|A| > p$.

Припустимо, що $[P : U] > p$. Тоді $|[U; P]| > 2$ і за означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[U; P] \ni N$ □ G і, значить, $N \cap D = \langle b \rangle$ □ D, що неможливо.Отже, $[P : U] = p$ і A – група типу (p, p).

Нехай $[U : \omega(U)] > p$. Тоді $|[\omega(U); U]| > 2$ і за означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[\omega(U); U] \ni N$ □ G. Але тоді $N \cap A = \langle a \rangle$ □ G, що суперечить мінімальності A в G. Таким чином, $[U : \omega(U)] \leq p$ і $|P| \in \{p^3, p^4\}$, $\beta \in \{1, 2\}$. Розглянемо далі можливі випадки: 1.1) Q – циклічна підгрупа; 1.2) Q – нециклічна підгрупа.

Випадок 1.1. У цьому випадку $Q = \langle c \rangle$, $|c| = q^{\Delta}$, $\Delta > 0$. Оскільки $[Q, \langle b \rangle] = Q$, то $q \equiv 1 (mod\ p)$ і $p^2 - 1 \equiv 0 (mod\ q)$. З цього випливає, що $p = 2$, $q = 3$. За попереднім $C_Q(A) = \langle c^q \rangle$.

Припустимо, що $\Delta > 1$. Тоді $|[U; (\langle c^q \rangle \leftthreetimes P)]| > 2$ і за означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[U; (\langle c^q \rangle \leftthreetimes P)] \ni N$ □ G. Покладемо $N_1 = D \cap N$. Тоді $\langle b \rangle \leq N_1$ □ D, $c \notin N_1$. Але тоді $[\langle c \rangle, \langle b \rangle] = \langle c \rangle \leq N_1$, що неможливо. Отже, $|c| = 3$.

Оскільки $b^2 \in Z(G)$, $[A, \langle b \rangle] \neq 1$, $[A, \langle c \rangle] = A$, $[\langle b \rangle, \langle c \rangle] = \langle c \rangle$, то $G = A \leftthreetimes D$, $A \leftthreetimes \langle c \rangle$ та $A \leftthreetimes \langle b \rangle$ – групи Міллера-Морено. Таким чином, у цьому випадку G – група типу 1 розглядуваної леми.

Випадок 1.2. Припустимо, що у цьому випадку Q має нециклічну максимальну підгрупу V. Тоді $|[V; D]| > 2$ і за означенням УЩН[$\overline{\mathrm{C}}$]-груп $[V; D] \ni N$ □ G. Звідси $Q \cap N = Q_1$ – нормальна силовська q-підгрупа із N і, значить, Q_1 □ G. За попереднім $V \leq Q_1 < Q$. Але тоді $Q_1 = V$ і тому V □ G. Ясно, що $\Phi(Q) < V$ і $[A, V] = 1$. За попереднім $V \leq \Phi(Q)$. Звідси $\Phi(Q) = V$, $[Q : \Phi(Q)] = q$, що неможливо в силу нециклічності підгрупи Q. Отже , всі максимальні підгрупи в Q циклічні і, значить, Q – мінімальна нециклічна група.

Відомо (див., наприклад, [123, теорема 2.1.3]), що тоді Q – група типу (q, q) чи група кватерніонів порядку 8. Зрозуміло, що D – група Шмідта.

Нехай Q – група кватерніонів порядку 8. Тоді $p = 3$, $q = 2$, $AutA \cong PSL(2, 3)$, $D/C_D(A)$ ізоморфна підгрупі із $AutA$. Відомо (див., наприклад, [120]), що $AutA$ не містить ненільнотентних підгруп порядку $2^{\Delta} \cdot 3$, $\Delta \in \{1, 2\}$. За попереднім $C_D(A) \leq \Phi(D)$. Зрозуміло, що $D/C_D(A)$ – ненільнотентна група. Звідси $C_Q(A) = 1$. Очевидно, $|[Q; D]| = 2$. Але тоді $|b| = 3$, $A \leftthreetimes \langle b \rangle$ – група Міллера-Морено.

Зрозуміло, що $Z = A \leftthreetimes Q$ містить підгрупу Шмідта $S = \langle b \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle$, де $a \in A$, $|a| = 3$, $|d| = 2$, $\langle d \rangle = \Phi(Q)$. Ясно, що $M = A \leftthreetimes \langle d \rangle$ □ Z. За теоремою Машке [128, теорема 20.2.2] $A = \langle z \rangle \times \langle a \rangle$, $|z| = 3$, $\langle z \rangle$ □ M. Припустимо, що $[z, d] = 1$. Тоді $\langle z \rangle$ □ Z. За теоремою Машке без порушення загальності можна вважати, що $\langle a \rangle$ □ Z. Але тоді $[D, A] = 1$, що неможливо. Отже, $d^{-1} z d = z^{-1}$, $d^{-1} a d = a^{-1}$. Оскільки в Q тільки одна інволюція d, то будь-який неодиничний елемент із Q індукує на A регулярний автоморфізм. Але тоді [129] $A \leftthreetimes Q$ – група Фробеніуса і $G = A \leftthreetimes D$, A – група типу (3, 3), $|b| = 3$, $D = Q \leftthreetimes \langle b \rangle$ – група Шмідта.

Зрозуміло, що $[d, b] = 1$. Нехай $T = A \leftthreetimes \langle b \rangle$ – силовська 3-підгрупа групи G, що є неабелевою групою порядку 3^3 і експоненти 3, $A = \langle c \rangle$

$\times < a >$, $|c| = |a| = 3$, $[< a >, < b >] = < c >$. В групі G існує підгрупа $B = T \leftthreetimes < d >$ і $T > U = < c > \times < b >$. Ясно, що U – нециклічна підгрупа, $|[U; B]| > 2$ і за означенням УЩН$[\overline{C}]$-груп $[U; B] \ni N \trianglelefteq G$.

Покладемо $T_1 = T \cap N$. Тоді T_1 – нормальна силовська 3-підгрупа з N. Звідси $T_1 \trianglelefteq G$. Оскільки $T_1 \ntriangleleft G$, то $T_1 < T$ і, значить, $T_1 = U$. Зрозуміло, що $A \cap N = A \cap U = <c> \trianglelefteq G$. Нехай $C_G(c) = C$. Тоді $C \trianglelefteq G$ *і* $G/C \cong Aut<c>$, $|Aut<c>| = 2$. З цього випливає, що $G' \leq$ C. Але тоді $Q \leq C$. Звідси $[C, Q] = 1$, що неможливо, оскільки $A \leftthreetimes Q$ – група Фробеніуса. Отже, Q не може бути групою кватерніонів порядку 8.

Нехай тепер Q – група типу (q, q). Тоді, як і раніше, $|b| = p$, $G = A \leftthreetimes D$, D ізоморфна підгрупі із $AutA$. За попереднім, $q > p$. Внаслідок [130] G – дисперсивна група, що не так. Таким чином, випадок 1.2 неможливий.

Випадок 2. У цьому випадку $G/\Phi(A)$ – група типу 1 розглядуваної леми, для якої $D = < c > \leftthreetimes < b >$, $|b| = 2^\beta$, $\beta \in \{1, 2, 3\}$, $|c| = 3$, $A \cap <b> = \omega(<b>) = \Phi(A) \leq <b^2> \leq Z(G)$, $A \leftthreetimes < c >$ – група Шмідта, $A' \neq 1$. Оскільки A – неабелева нормальна силовська 2-підгрупа порядку 8 деякої групи Шмідта, то, як відомо, A – група кватерніонів порядку 8, $[A, <b>] \not\leq \Phi(A)$.

Припустимо, що $\beta = 3$. Тоді підгрупа A містить такий елемент a, що $|a| = 4$ і $U = < a, b >$, $[a, b] \in <b^2> \leq Z(G)$. З цього випливає, що $<b>$ – циклічна максимальна підгрупа нециклічної підгрупи U, $Z(U)$ містить елемент b^2 . Завдяки теоремі 12.5.1 з [119] $U = <b> \leftthreetimes <a_1>$, $a_1 = a b^2$, $|a_1| = 2$, $\omega(U) = <a_1> \times \omega(<b>)$, $A \cap \omega(U) = \omega(<b>)$, $[<a>, <c>] \not\leq <a>$. Зрозуміло, що $|[\omega(U); U]| > 2$ і за означенням УЩН$[\overline{C}]$-груп $[\omega(U); U] \ni N \trianglelefteq G$. Ясно, що $\omega(N) = \omega(U) \trianglelefteq G$. Звідси $[a_1, c] = [ab^2, c] = [a, c] \in A \cap \omega(U) = <a^2> = <b^4>$, що суперечить попередньому. Отже, $\beta \in \{1, 2\}$.

Припустимо, що $\beta = 1$. Тоді $P = A \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|[(\omega(A) \times \langle b \rangle); P]| > 2$ і за означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[(\omega(A) \times \langle b \rangle); P]$ э N □ G. Звідси $N \cap D = \langle b \rangle$ □ D, що неможливо. Отже, $\beta = 2$ і $|P| = 2^4$. Для групи G типу 1 розглядуваної леми $P/\Phi(A)$ – група діедра порядку 8, тому знайдеться елемент x із A такий, що $|x| = 4$ і $P' = \langle x \rangle$. В групі P порядку 2^4 з циклічним комутантом порядку 4 існує циклічна підгрупа порядку 8 . За попереднім підгрупа P не містить підгруп типу $(2, 2)$. Але тоді P – група кватерніонів порядку 2^4 і G – група типу 2 розглядуваної леми. Лему доведено.

Л е м а 3.1.4. *Не існує скінченних розв'язних мінімальних недисперсивних УЩН$\left[\overline{C}\right]$-груп G, комутант яких не містить жодної силовської підгрупи групи G.*

Доведення. Нехай група G існує. Тоді завдяки теоремі 2.2.4 з [123] $G = \prod_{i-1}^{n} S_i = \prod_{i-1}^{n} P_i$, де $S_i = A_i \leftthreetimes \langle b_{i-1} \rangle$ – група Шмідта, при $i = 1$ $\langle b_{i-1} \rangle = \langle b_o \rangle = \langle b_n \rangle$, $A_i \langle b_i \rangle = P_i$ – силовська p_i-підгрупа групи G, P_i – ненормальна в G, при $i \neq j$ $[S_i, S_j] = 1$, $b_i \in Z(P_i)$, $A_i \cap \langle b_i \rangle \leq \Phi(\langle A_i \rangle) \leq Z(G)$. В силу леми 3.1.1 $A_i \cap \langle b_i \rangle \leq \omega(\langle b_i \rangle)$.

Покладемо $Z = \mathop{X}_{i=1}^{n} (A_i \cap \langle b_i \rangle)$. Тоді $Z \leq Z(G)$. Зрозуміло, що $Z \leq \Phi(G) \cap Z(G)$, $G/Z = \mathop{X}_{i=1}^{n} S_i \cdot Z/Z$. Зрозуміло також, що G/Z – мінімальна недисперсивна група і її комутант не містить жодної силовської p_i-підгрупи з G/Z. Завдяки лемі 2.1.1 G/Z – УЩН[$\overline{C}$]-група. З цього випливає, що G/Z – група з умови розглядуваної леми, у якої $Z = 1$, тобто $G = \mathop{X}_{i=1}^{n} S_i$. Отже, можливі два випадки: 1) $Z = 1$; 2) $Z \neq 1$.

Випадок 1. У цьому випадку $G = \mathop{X}\limits_{i=1}^{n} S_i = \mathop{\boldsymbol{\Pi}}\limits_{i-1}^{n} \boldsymbol{P_i}$, $\boldsymbol{P_i} = A_i \times \langle b_i \rangle$. Не порушуючи загальності можна вважати, що p_1 – найменше просте число з $\pi(G)$. Очевидно, що $n > 1$. Зрозуміло, що $S_1 = A_1 \leftthreetimes \langle b_n \rangle$ і за вибором $p_n > p_1$.

Нехай $a \in A_1$ і $|a| = p_1$. Тоді в P_1 існує нециклічна підгрупа $U = \langle a_1 \rangle \times \langle b_1 \rangle$. Оскільки $p_n > p_1$, то в силу леми 3.1.1 $|A_1| > p_1$. Звідси U – власна підгрупа груп $[U; P_1] \ni N \trianglelefteq G$. Зрозуміло, що $N \cap S_2 = \langle b_1 \rangle \trianglelefteq S_2$, що в групах Шмідта неможливо. Отже, U – максимальна підгрупа із P_1 і, значить, $\langle a_1 \rangle$ – максимальна підгрупа з A_1. Але тоді $|A_1| = p_1^2$ і A_1 – група типу (p_1, p_1). Для групи Шмідта S_1 маємо $p_1 = 2$, $p_n = 3$ (лема 3.1.1) і тому $A_п$ – 3-група.

Припустимо, що $n > 2$. Тоді $S_п = A_п \leftthreetimes \langle b_{n-1} \rangle$. Тепер, як і для підгрупи S_1, можна показати, що $|A_п| \in \{3, 9\}$. В силу леми 3.1.1 $p_{n-1} < p_n$. З цього випливає, що $|A_п| = 3$ і $p_{n-1} = 2$. Але тоді $n = 2$, що суперечить припущенню. Отже, $n = 2$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ і $G = S_1 \times S_2$, $S_1 = A_1 \leftthreetimes \langle b_2 \rangle$, $S_2 = A_2 \leftthreetimes \langle b_1 \rangle$, $|b_1| = 2^{\alpha_1}$, $|b_2| = 2^{\alpha_2}$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$.

Припустимо, що $\alpha_1 > 1$. Тоді в A_1 знайдеться такий елемент a_1, що $|a_1| = 2$ і в G існують нециклічні підгрупи $U = \langle a_1 \rangle \times \omega(\langle b_1 \rangle)$, $V = S_2 \times \langle a_1 \rangle$. Зрозуміло, що $|[U; V]| > 2$ і за означенням УЩН[$\overline{\mathrm{C}}$]-груп $[U; V] \ni N \trianglelefteq G$. Звідси $V \cap A_1 = A_1 \cap N = \langle a_1 \rangle \trianglelefteq G$, що суперечить мінімальності нормальності $\langle a_1 \rangle$ в S_1. Отже, $\alpha_1 = 1$ і $S_2 \cong S_3$.

Припустимо, що $\alpha_2 > 1$. Тоді в групі Шмідта S_1 $\omega(\langle b_2 \rangle) \leq Z(S_1)$ і, значить, $\omega(\langle b_2 \rangle) \leq Z(G)$. Покладемо $U = \langle b_1 \rangle \times \langle a_1 \rangle$, де $a_1 \in A_1$, $|a_1| = 2$. Тоді U – нециклічна підгрупа, в G існує підгрупа $V = \omega(\langle b_2 \rangle) \times S_2 \times \langle a_1 \rangle$ і $|[U; V]| > 2$. За означеннямУЩН[$\overline{\mathrm{C}}$]-груп $[U; V] \ni N \trianglelefteq G$. Звідси $A_1 \cap V = A_1 \cap N = \langle a_1 \rangle \trianglelefteq G$, що суперечить мінімальності нормальності A_1 в S_1. Отже, $\alpha_2 = 1$ і $S_1 \cong A_4$.

Покладемо $S_1 = U$, $S_2 = V$. Тоді $G = U \times V$. Випадок 1 розглянутий повністю.

Випадок 2. У цьому випадку $G/Z = U/Z \times V/Z$ – група з твердження розглядуваної леми, $U/Z = S_1 \cdot Z/Z \cong A_4$, $V/Z \cong S_3$. З цього випливає, що $\pi(G) = \{2, 3\}$ і $Z = (\langle a_1\rangle \cap \langle b_1\rangle) \times (\langle a_2\rangle \cap \langle b_2\rangle)$. Оскільки $p_2 = 3$, $p_1 = 2$, S_1 – група Шмідта, $\langle b_2\rangle \cap A_2 \leq \Phi(A_2)$, то $|A_2| = 3$, $|\langle b_2\rangle \cap A_2| = 1$. Звідси $|Z| = 2$, $\omega(\langle b_1\rangle) = Z \leq \Phi(A_1)$ і A_1 – група кватерніонів порядку 8.

Далі, розглядаючи фактор-групу G/Z, прийдемо до випадку 1, у якому $|P_1/Z| = 8$. Але тоді $|P_1| = 2^4$. Оскільки $b_1 \notin A_1$, то $|b_1| = 4$ і $b_1 \in Z(P_1)$. Нехай x – твірний елемент з A_1. Покладемо $y = x b_1$. Тоді $|y| = 2$, $P_1 = A_1 \leftthreetimes \langle y\rangle$. В P_1 існує нециклічна підгрупа $A = \langle x^2\rangle \times \langle y\rangle$. Ясно, що $|[A; P_1]| > 2$. Тоді за означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[A; P_1] \ni N$ □ G. Звідси $P_1 = A_1 \cdot N$ □ G, що суперечить ненормальності P_1 в G. Отже, випадок 2 неможливий.

За попереднім $G = U \times V$, де $U = A \leftthreetimes \langle c\rangle \cong A_4$, $V = \langle d\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle \cong S_3$. Зрозуміло, що $|b| = 2$ і в G існує власна ненормальна підгрупа $B = U \times \langle b\rangle$, яка містить власну ненормальну в G силовську 2-підгрупу $D = A \times \langle b\rangle$ типу $(2, 2, 2)$. Зрозуміло, що $A > \langle a\rangle$, $|a| = 2$, $D > X = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ – нециклічна підгрупа. Легко бачити, що $|[X; B]| > 2$ і тоді за означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[X; B] \ni N$ □ G. Ясно, що $B = D \leftthreetimes \langle c\rangle$, $D \cap N = D_1$ – нормальна силовська 2-підгрупа з N і, значить, D_1 □ D. Оскільки $D \ntriangleleft G$, то $D_1 < D$ і тому D_1 не містить A. Зрозуміло, що $A \cap N = \langle a\rangle$ □ G. Але тоді $a \in Z(G)$, що неможливо. Одержана суперечність показує, що група G не існує. Лему доведено.

Л е м а 3.1.5. *Скінченні нерозв'язні мінімальні недисперсивні УЩН[$\overline{C}$]-групи є групами одного з типів:*

1) $G \cong SL(2,5)$;

2) $G \cong PSL(2, p)$, де $p \in \{5, 13, 43, 67\}$.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Тоді завдяки теоремі 2.2.6 з [123] фактор-група $G/\Phi(G)$ ізоморфна одній із груп : а) $PSL(2, 2^q)$, q – просте число; b) $PSL(2, 3^q)$, q – непарне просте число; c) $PSL(2, p)$, $p > 11$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \ (mod\ 16)$, $p^2 + 1 \equiv 0 \ (mod\ 5)$; *d)* $SL(2,5)$ чи $PSL(2,5)$; к) групі Судзукі $Sz(2^q)$, q – непарне просте число. Групи всіх згаданих типів є простими мінімальними недисперсивними групами. Розглянемо далі два можливі випадки: 1) $\Phi(G) = 1$; 2) $\Phi(G) \neq 1$.

Випадок 1. У цьому випадку G – група одного з типів а) – к). Якщо $q = 2$, то G – група типу а). Внаслідок теореми Діксона [127, теорема 8.2.7] G має порядок 60 і, значить, $G \cong PSL(2,5)$. Звідси G – група типу 2 розглядуваної леми.

Нехай далі $q > 2$. Тоді q – непарне просте число і тому G – група одного з типів а), b), к). В силу теореми Діксона і результатів про групи Фробеніуса (див., наприклад, [129]) група G містить підгрупу Фробеніуса $B = P \leftthreetimes \langle a\rangle$, де $B < G$, P – елементарна абелева група порядку p^q, $p \in \{2, 3\}$, $|a| = (p^q - 1)/к$, $к$ – найбільший спільний дільник чисел 2 і p-1. Зрозуміло, що P містить нециклічну підгрупу A типу (p, p). Зрозуміло, що $|[A; B]| > 2$. За означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[A; B] \ni N \square G$, що суперечить простоті групи G. Отже, G не може бути групою одного з типів а), b), к).

Якщо G – група типу а), то вона група типу 1 чи 2.

Нехай, нарешті, G – група типу c). Якщо $p = 13$, то G – група типу 2 розглядуваної леми.

Припустимо, $p > 13$. Тоді внаслідок теореми Діксона [127, теорема 8.2.7] $G = \frac{1}{2} \cdot (p - 1) \cdot p \cdot (p + 1)$. Зрозуміло, що $|G| \equiv 0 \ (mod\ 6)$. Оскільки $p > 13$, *то* $(p - 1)(p + 1) \equiv 0 \ (mod\ 8)$. Звідси $|G| \equiv 0 \ (mod\ 12)$. В силу теореми Діксона G містить такі три максимальні підгрупи: $M_1 \cong \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$ – група

Фробеніуса, $|a| = p$, $|b| = (p-1)/2$; $M_2 \cong < b > \leftthreetimes <d>$ –група діедра, $|d| = 2$; $M_3 \cong < c > \leftthreetimes <d>$ – група діедра, $|c| = (p+1)/2$.

Нехай f – елемент порядку q, який належить підгрупі $<b>$ чи $< c >$. Тоді в M_1 існує нециклічна підгрупа $X_1 = <a> \leftthreetimes < f >$, в M_2 існує нециклічна підгрупа $X_2 = < f > \leftthreetimes <d>$, в M_3 існує нециклічна підгрупа $X_3 =< f > \leftthreetimes <d>$.

Припустимо, що $|[X_i ; M_i]| > 2$, де $i \in \{1, 2, 3\}$. Тоді за означенням УЩН[$\overline{\mathrm{C}}$]-груп $[X_i; M_i]$ э N_i □ G, що суперечить простоті групи G. Звідси $X_i = M_i$ або X_i – максимальна підгрупа з M_i.

Нехай $X_2 = M_2$. Тоді $f = b$ і $|f| = |b| = q = \frac{1}{2} \cdot (p-1)$. Звідси $p = 2q + 1$. Оскільки $p > 13$, то $q > 3$ і $(p + 1) / 2 = 6t$, тому $p = 12t - 1$, $t > 1$. Звідси $[M_3 : X_3]$ ділиться на добуток двох простих чисел. Оскільки M_3 – надрозв'язна група, то $|[X_3; M_3]| > 2$ і за означенням УЩН[$\overline{\mathrm{C}}$]-груп $[X_3; M_3]$ э N_3 □ G, що неможливо (G – проста група). Отже, X_2 – максимальна підгрупа з M_2. Припустимо, що $X_3 = M_3$. Тоді $f = c$, $|f| = |c| = q = \frac{1}{2} \cdot (p+1)$. Звідси $p = 2q - 1$, $q > 7$, $(p + 1) / 2 = 6t$, $p = 12t + 1$, $t > 1$, і тому $|[X_2; M_2]| > 2$, що не так. Таким чином, X_3 – максимальна підгрупа з M_3.

Оскільки M_2 та M_3 – надрозв'язні групи, то $|X_2|$ і $|X_3|$ – добуток двох простих чисел і, значить, $|M_2|$ і $|M_3|$ – добуток трьох простих чисел. Припустимо, що $[M_2 : X_2] = r$ – просте число, $[M_3 : X_3] = s$ – просте число. Звідси при $p - 1 \equiv 0 \pmod{12}$ $|M_1| = 12$, тому $p = 13$, що не так . При $p + 1 \equiv 0 \pmod{12}$ $|M_3| = 12$ і тому $p = 11$, що також не так. З цього випливає, що мають місце такі випадки : 1. 1) $p - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, $p + 1 \equiv 0 \pmod{6}$; 1.2) $p - 1 \equiv 0 \pmod{6}$, $p + 1 \equiv 0 \pmod{4}$.

Випадок 1.1. У цьому випадку $p = 4r + 1$ і $p = 6s - 1$. З цього одержуємо, що

$$\begin{cases} 2r - 3s - 1 = 0 \\ 2r + 3s - p = 0. \end{cases}$$

Легко перевірити, що при співвідношеннях $p^2 + 1 \equiv 0 \ (mod\ 5)$ і $p^2 - 1 \not\equiv 0 \ (mod\ 16)$ мають місце нерівності $s > 22$ і $r > 22$. Зрозуміло, що $r = 5m + x$, $s = 5n + y$, $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$, $m > 3$, $n > 3$, $p = 4(5m + x) + 1 = 20m + 4x + 1$, $p = 6(5n + y) - 1 = 30n + 6y - 1$. Звідси завдяки простоті числа p маємо, що $x \neq 1$, $y \neq 1$. Далі легко бачити, що

$$\begin{cases} (4\boldsymbol{x} + 1)^2 + 1 \equiv (\mathrm{mod}\, 5) \\ (6\boldsymbol{y} - 1)^2 + 1 \equiv (\mathrm{mod}\, 5), \end{cases}$$

і тому що $x \neq 2$, $y \neq 2$. Отже $x, y \in \{3, 4\}$. Ясно, що $4x + 1 = m_1 \in \{13, 17\}$, $6y - 1 = n_1 \in \{17, 23\}$. Тепер з рівності $2r - 3r - 1 = 0$ легко одержати, що $2x - 3y - 1 \equiv 0 \ (mod\ 5)$. Звідси $x, y \in \{4\}$ і $2m - 3m = 1$. Відомо, що тоді $m = 3k + 2$, $n = 2k + 1$. Звідси $r = (3k + 2) \cdot 5 + 4 = 15k + 14$ і тому k – непарне число, тобто $k = 2l + 1$. Але тоді $s = 5(2k + 1) + 4 = 10k + 9 = 10(2l + 1) + 9 = 20l + 19$. Оскільки $p = 6s - 1$, то $p = 6(20l + 19) - 1$ і, значить, p не є просте число. Суперечність. Отже, випадок 1.1 неможливий.

Випадок 1.2. У цьому випадку $p = 6r + 1$, $p = 4s - 1$ і тому $p = 3r + 2s$, $3r - 2s - 1 = 0$. Легко бачити, що $r > 5$. При $r = 7$ $p = 43$, а при $r = 11$ $p = 67$ і G – група типу 2 розглядуваної леми. Отже, в подальшому будемо вважати, що $s > r \geq 13$. Як і у випадку 1.1 $r = 5m + x$, $s = 5n + y$, $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$ і тому $p = 6(5m + x) + 1 = 30m + 6x + 1 = 4(5n + y) - 1 = 20n + 4y - 1$. Оскільки $p^2 + 1 \equiv 0 \ (mod\ 5)$, то

$$\begin{cases} (6\boldsymbol{x} + 1)^2 + 1 \equiv (\mathrm{mod}\, 5) \\ (4\boldsymbol{y} - 1)^2 + 1 \equiv (\mathrm{mod}\, 5). \end{cases}$$

Звідси легко бачити, що $x, y \in \{1, 2\}$. Підставляючи в рівність $3r - 2s - 1 = 0$ значення r і s одержимо, що $3x - 2y - 2 \equiv 0 \ (mod\ 5)$. Звідси випливає, що $x = y = 1$, $3m - 2n = 0$ і тому $m = 2k$, $n = 3k$. Таким чином,

$r = 10k + 1$, $s = 15k + 1$. З непарності s маємо, що $k = 2l$ і, значить, $r = 20l + 1$, $p = 6(20l + 1) + 1 = 120l + 7$. Але тоді $p^2 = (120l + 7)^2 = 120^2 l^2 + 2 \cdot 120 \cdot 7 + 49$. Звідси $p^2 - 1 \equiv 0 \ (mod\ 16)$, що не так. Випадок 1.2, а з ним і випадок 1, розглянули повністю.

Випадок 2. У цьому випадку $\Phi(G) \neq 1$ і внаслідок леми 2.2.4 з [123] $\Phi(G) = \langle d\rangle \times Z$, де $|d| \in \{1, 2\}$, Z – група без інволюцій. Якщо Z – циклічна група, то в силу леми 2.2.1 з [123] $Z = 1$, $|d| = 2$ і $G/\Phi(G) \cong G/\langle d\rangle$ – група з випадку 1, тобто $G/\langle d\rangle \cong PSL(2, p)$, де $p \in \{5, 13, 43, 67\}$. Завдяки теоремі 2.2.6 з [123] $G \cong SL(2, p)$. Якщо $p = 5$, то G – група типу 1.

Припустимо, Z – нециклічна група. Тоді $Z \trianglelefteq G$ і G/Z – УЩН[ ]-група, яка в силу твердження 1.1.10 розв’язна. Але тоді розв’язна і група G, що не так. Отже, Z – циклічна група. Звідси і за попереднім $Z = 1$.

Нехай $p \neq 5$. Тоді внаслідок леми 2.2.1 з [123] всі власні нормальні підгрупи з G належать $\langle d\rangle$. За попереднім G містить підгрупу $M_1 = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, де $|a| = p$, $|b| = p - 1$, $d \in \langle b\rangle$, $M_1/\langle d\rangle$ — група Фробеніуса. Для всіх чисел $p \in \{13, 43, 67\}$ маємо $|b| = 2qr$, q і r – прості числа, $r > q$. Тому M_1 містить нециклічну підгрупу $X = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b_1\rangle$, де $|b_1| = r$. Ясно, що $|[X; M_1]| > 2$ і за означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[X; M_1] \ni N \trianglelefteq G$. Зрозуміло, що $N < G$ і $|N| > 2$, що суперечить попередньому. Таким чином, у випадку 2 G – група типу 1. Лему доведено.

Т е о р е м а 3.1.1. *Скінченні недисперсивні УЩН*[$\overline{C}$]*-групи є мінімальними недисперсивними групами і вичерпуються групами наступних типів:*

1) $G = A \leftthreetimes D$, *A – група типу (2, 2),* $D = Q \leftthreetimes \langle b\rangle$ *– група Міллера-Морено ,* $Q = \langle c\rangle$, $|c| = 3$, $|b| \in \{2, 4\}$, $A \leftthreetimes \langle b\rangle$ *та* $A \leftthreetimes \langle c\rangle$ *– групи Міллера-Морено;*

2) $G = A \cdot D$, A □ G, A – група кватерніонів порядку 8, $D = Q \leftthreetimes \langle b\rangle$ – група Шмідта, $Q = \langle c\rangle$, $|c| = 3$, $\Phi(A) = \Phi(\langle b\rangle)$, $A \cdot \langle b\rangle$ – група кватерніонів порядку 2^4, $|b| = 4$, $A \leftthreetimes \langle c\rangle$ – група Шмідта;

3) $G \cong SL(2, 5)$;

4) $G \cong PSL(2, p)$, $p \in \{5, 13, 43, 67\}$.

***Доведення**. Необхідність.* Нехай G – досліджувана група. Можливі наступні два випадки: 1) G – мінімальна недисперсивна група; 2) G – не мінімальна недисперсивна група.

Випадок 1. Нехай G – розв’язна група. Тоді в силу леми 3.1.4 G задовольняє умову леми 3.1.3 і тому G – група типу 1, 2 теореми. Нехай тепер G – нерозв’язна група. Тоді G задовольняє умову леми 3.1.5. Звідси G – група типу 3, 4 теореми.

Випадок 2. У цьому випадку G містить недисперсивну, а значить, мінімальну недисперсивну підгрупу N. Покажемо, що N □ G.

Припустимо спочатку, що N – нерозв’язна група. Тоді вона група типу 3, 4 даної теореми. За теоремою Діксона [127, теорема 8.2.7] N містить підгрупу $X = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = p$, $|f| = q$ – непарне просте число, яке ділить $p - 1$, $X \leq M_1 = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$ – максимальна підгрупа з N, при $N \cong SL(2, 5)$ $|b| = 4$, при $N \cong PSL(2, p)$ $|b| = (p - 1)/2$, N не має власних нормальних підгруп, що містять X. Легко бачити, що при $p \in \{5, 13, 43, 67\}$ $|[X; N]| > 2$. За означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[X; N]$ э N_1 □ G.

Припустимо що N_1 – дисперсивна підгрупа. Тоді, за попереднім, $X = N_1$. Зрозуміло, що N/X – УЩН[ ]-група і тому завдяки твердженню 1.1.10 вона розв’зна і, значить, N – розв’язна підгрупа. Суперечність. Отже, N_1 – недисперсивна група. Але тоді $N_1 = N$, а значить, N □ G.

Нехай N – розв’язна група. Тоді N – група типу 1, 2 розглядуваної теореми. Звідси $N = P \cdot Q$, $Q = \langle c\rangle$, $|c| = 3$, Q ненормальна в N, Q – власна немаксимальна підгрупа з N, $P = A <b>$ – ненормальна в N силовська 2-підгрупа, A – нециклічна нормальна підгрупа з N. Покладемо $X_1 = A$. Зрозуміло, що P містить власну нециклічну підгрупу X_2, яка містить $<b>$. Тоді $|[X_2 ; N]| > 2$ і за означенням УЩН[$\overline{\boldsymbol{C}}$]-груп $[X_1 ; N]$ э $N_1 \square G$; $[X_2 ; N]$ э $N_2 \square G$. Звідси $P \leq T = N_1 \cdot N_2 \square G$. Якщо $T = N$, то $N \square G$. Нехай $T < N$. Оскільки P – максимальна підгрупа з N, то $T = P \square N$, що неможливо ($P \ntrianglelefteq N$). Отже, завжди $N \square G$. Зрозуміло, що 2 ділить порядок групи G .

Нехай H – силовська 2-підгрупа з N. Тоді, очевидно, що H – нециклічна група. Ясно, що H ненормальна в N. За лемою Фраттіні [128, лема 17.1.8] $G = N \cdot M$, де $M = N_G(H)$, $M \cap N = N_N(H) < N$. Оскільки $N < G$, то $M \setminus N$ містить r-елемент g (r – просте число) такий, що $g^r \in N \cap M = U$. Звідси в M існує підгрупа $Y = U < g >$ і $[Y : U] = r$.

Припустимо, що N – група типу 1, 2 теореми. Тоді H містить власну нециклічну підгрупу X, $H = A< x >$, $A \square N$, $x \in X$. Зрозуміло, що $|[X ; Y]| > 2$. За означенням УЩН[$\overline{\boldsymbol{C}}$]-груп $[X ; Y]$ э $N_1 \square G$. Звідси $N_1 \cap N = H_1 = H \cap N \square N$, H_1 містить X, тому $H = A \cdot H_1 \square N$, що неможливо.

Нехай, нарешті, N – група типу 3, 4 теореми. Тоді за теоремою Діксона H – група типу (2,2) чи група кватерніонів порядку 8, $U \leftthreetimes <d>$, $|d| = 3$. Зрозуміло, що $|[H ; Y]| > 2$. За означенням УЩН[$\overline{\boldsymbol{C}}$]-груп $[H ; Y]$ э $N_1 \square G$. Звідси $N_1 \cap N \square N$, $N_1 \cap N$ належить U, $N \cap N_1$ містить H і тому $H \square N$, що неможливо. Одержана суперечність показує, що випадок 2 неможливий. Отже, G – група одного з типів 1– 4 розглядуваної теореми. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G – група, одного з типів 1– 4 розглядуваної теореми. Зрозуміло, що G – скінченна група. Завдяки теоремам 2.2.3 і 2.2.6 з [123] G – мінімальна недисперсивна, а значить, недисперсивна група. Залишається показати, що G – УЩН[$\overline{\boldsymbol{C}}$]-група, тобто для будь-якого відрізка підгруп $[X ; Y]$, де X – власна немаксимальна нециклічна підгрупа з Y, виконується співвідношення $[X ; Y]$ э N □ G. Якщо X □ G чи Y □ G, то покладемо $N = X$ чи $N = Y$ і все доведено. Звідси $X \ntrianglelefteq G$, $Y \ntrianglelefteq$ і $Y < G$.

Нехай G – група типу 3, 4 теореми. В силу теореми Діксона G має максимальні підгрупи тільки таких типів:

$M_1 \cong \langle a\rangle \langle b\rangle$, $|a| = p$, $|b| = (p - 1)/k$, $k \in \{1, 2\}$, при $k = 2$ $G \cong PSL(2, p)$, G – проста група, M_1 – група Фробеніуса, при $k = 1$ $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle f\rangle$, $|f| = 2$, $f \in Z(G)$, $G/\langle f\rangle \cong PSL(2, p)$, $M_1/\langle f\rangle$ – група Фробеніуса;

$M_2 \cong \langle b\rangle \cdot \langle d\rangle$, $|b| = (p - 1) / k$, $d^{-1}\, b\, d = b^{-1}$, $|d| = 4/k$, $k \in \{1, 2\}$, $|\langle b\rangle \cap \langle d\rangle| = 2^{k-1}$, при $k = 1$ $G \cong SL(2, p)$, при $k = 2$ $G \cong PSL(2, p)$;

$M_3 \cong \langle c\rangle \cdot \langle d\rangle$, $d^{-1}\, c\, d = c^{-1}$, $|c| = (p + 1)/ k$, $|d| = 4/k$, $k \in \{1, 2\}$, $|\langle c\rangle \cap \langle d\rangle| = 2^{k-1}$, при $k = 1$ $G \cong SL(2, p)$, при $k = 2$ $G \cong PSL(2, p)$;

$M_4 \cong F \leftthreetimes \langle g\rangle$ – група Шмідта, $|g| = 3$, $|F| = 8/k$, $k \in \{1, 2\}$, при $k = 1$ F – група кватерніонів порядку 8, $G \cong SL(2, p)$, при $k = 2$ F – група типу $(2, 2)$, $G \cong PSL(2, p)$;

$M_5 \cong \langle g\rangle \leftthreetimes \langle d\rangle$, $|g| = 3$, $|d| = 4/k$, $d^{-1}\, g\, d = g^{-1}$, $k \in \{1, 2\}$, при $k = 1$ $G \cong SL(2, p)$, при $k = 2$ $G \cong PSL(2, p)$.

Зрозуміло, що Y належить одній із підгруп M_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Оскільки X – нециклічна підгрупа, то $|X|$ ділиться на добуток двох простих чисел p_1 і p_2. За умовою $|[X ; Y]| > 2$. Звідси $[X : Y]$ ділиться на добуток двох простих чисел p_3 і p_4. Таким чином, $|Y|$ ділиться на $p_1 p_2 p_3 p_4$. При $p \in \{5, 13, 43, 67\}$ $|M_i|$ не ділиться на добуток чотирьох простих чисел і, значить, $|Y|$ не ділиться на $p_1 p_2 p_3 p_4$. Суперечність. Отже, група G типу 3, 4 є УЩН[$\overline{\boldsymbol{C}}$]- групою.

Нехай G – група типу 1, 2 теореми. Зрозуміло, що тоді $A \leq Z$ – власна немаксимальна підгрупа однієї з максимальних підгруп групи G, $G = A \cdot D$, A □ G, A – група типу (p, p) чи група кватерніонів порядку 8, $A \cap D \leq \Phi(A)$,

$|\,\Phi(A)\,| \in \{1, 2\}$, $D = Q \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|Q| = 3$, $|\,b\,| \in \{2, 4\}$, $\pi(G) = \{2, 3\}$, $P = A\langle b\rangle$ – силовська 2-підгрупа з G, $P \ntrianglelefteq G$, $Q \ntrianglelefteq G$. Розглянемо далі два можливі випадки: 1) $A \not\leq X$; 2) $A \leq X$.

Випадок 1. У цьому випадку $A \cap X = F < A$. Для груп розглядуваних типів $F \leq \Phi(A)$, $|\Phi(A)| \in \{1, 2\}$. Оскільки $\Phi(A) \leq Z(G)$ і $D \cap A = \Phi(A)$, то $G/\Phi(A) = A/\Phi(A) \leftthreetimes D/\Phi(A)$ і, значить, $\Phi(A) \cdot X/\Phi(A)$ ізоморфна деякій підгрупі з $D/\Phi(A)$. Легко бачити, що $D/\Phi(A)$ – максимальна підгрупа з $G/\Phi(A)$, тому D – максимальна підгрупа з G і, значить, D – підгрупа з циклічними 2-максимальними підгрупами. Звідси FX/F не може бути ізоморфною 2-максимальній підгрупі з D, а тим більше з D/F.

Припустимо, що $|FX/F| = |D/F|$. Тоді $|FX/F| = 6$. Звідси $|FX| \geq 6$. З цього випливає, що $G = A \cdot X$, $Y = X \cdot U$, де $U = Y \cap A$. Оскільки $|[X ; У]| > 2$, то $[X : Y] > p$ – просте число. Звідси $|U| > p$. Зрозуміло, що $U \square У$, $U \square A$ і, значить, $U \square G$, $F < U$, тому U/F – неодинична нормальна підгрупа з G/F, що є власною підгрупою з A/F. В групах G розглядуваних типів A/F мінімальна нормальна підгрупа в G/F. Суперечність. Отже, $|FX/F| < |D/F|$.

В групах G типу 1 теореми $D/F \cong S_3$, $F = 1$. Але тоді X – нециклічна група, що не так. В групах G типу 2 D – мінімальна нециклічна підгрупа порядку 12, $F \leq Z(G)$, $|F| = 2$, F – єдина підгрупа порядку 2 з G і $D/F \cong S_3$. Звідси FX/F – група порядку 2 чи 3. При $|FX/F| = 3$ одержуємо циклічність підгрупи FX і, значить, циклічність підгрупи X, що не так. Нехай яка ізоморфна S_3. Але в розглядуваних типах груп $G/A \cong S_3$. Суперечність. Отже, і випадок 2 неможливий. Всі випадки розглянули. Достатність доведено. Теорему доведено.

Н а с л і д о к 3.1.2. *Для скінченних недисперсивних УЩН[$\overline{\mathbf{C}}$]-груп G справедливі твердження:*

1) $|G|$ ділиться на 12, а для розв'язних груп G $|G|$ ділиться на 24;

2) існує тільки скінченне число неізоморфних груп такого роду;

3) порядок групи G обмежений.

Наслідок безпосередньо випливає з теореми 3.1.1.

Л е м а 3.1.6. *Локально ступінчаста примарна УЩН[$\overline{\boldsymbol{C}}$]-група G розв'язна і ступінь її розв'язності обмежена фіксованим числом.*

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Тоді G – p-група. Нехай $|G| < \infty$. Якщо G має лише одну підгрупу порядку p, то в силу теореми 12.5.1 з [119] G – метациклічна група і тому $\boldsymbol{G}'' = 1$. Нехай G містить підгрупу A типу *(p, p)*. Якщо $|G| \le p^6$, то, очевидно, що лема справедлива. Припустимо, що $|G| > p^6$. Тоді G містить підгрупу B порядку p^4, $A < B$, $|[A ; B]| > 2$, тобто A – власна немаксимальна підгрупа з B. За означенням УЩН[$\overline{\boldsymbol{C}}$]-груп $[A ; B] \ni N$ □ G. Зрозуміло, що G/N – УЩН[ ]-група. Звідси завдяки твердженню 1.1.11 $(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{N})'' = 1$, і тому в цьому випадку лема справедлива.

Нехай тепер $|G| = \infty$. Покажемо, що G – локальна скінченна група. Припустимо, що це не так. Тоді G містить нескінченну скінченно породжену УЩН[$\overline{\boldsymbol{C}}$]-підгрупу X. Оскільки X – локально ступінчаста група, то вона містить нескінченний ланцюг

$$X > X_0 > X_1 > \ldots > X_i > \ldots$$

нормальних в X підгруп X_i скінченного індексу. Позначимо через N перетин всіх X_i. Тоді N □ X і за теоремою Ремака [128, теорема 4.3.9] X/N ізоморфна підгрупі з групи G^*, де G^* – декартовий добуток підгруп X/X_i. Зрозуміло, що X/N – нескінченна скінченно породжена примарна УЩН[$\overline{\boldsymbol{C}}$]-група. За попереднім, X/X_i – розв'язна p-група і ступінь її розв'язності обмежена фіксованим числом. Звідси G^* – розв'язна група і, значить, X/N – розв'язна і, як відомо, скінченна група. Суперечність. Отже, G – локально скінченна група. Користуючись цим, тепер легко показати, що ступінь розв'язності групи G обмежена фіксованим числом. Лему доведено.

Л е м а 3.1.7. *Ступінь розв'язності скінченної дисперсивної УЩН[$\overline{\boldsymbol{C}}$]-групи G обмежена фіксованим числом.*

Доведення. Нехай група G задовольняє умову леми. Якщо G – нільпотентна група, то твердження леми випливає з леми 3.1.6.

Нехай G – ненільпотентна група. Припустимо спочатку, що G – надрозв'язна група. Тоді, як відомо, $\boldsymbol{G'}$ – нільпотентна група і, значить, за попереднім, ступінь розв'язності групи G обмежена фіксованим числом. Нехай тепер G – ненадрозв'язна група. Тоді, очевидно, що G містить нециклічну силовську q-підгрупу Q. З дисперсивності групи G випливає, що G містить нормальну силовську p-підгрупу P.

Припустимо, що P – нециклічна група. Тоді G/P – УЩН[ ]-група і, як у лемі 3.1.6, G має обмежену ступінь розв'язності. Нехай P – циклічна група. Покладемо $P \leftthreetimes Q = B$. Нехай A – нециклічна підгрупа з Q. Припустимо, що $\left|[A; B]\right| > 2$. Тоді за означенням УЩН[$\overline{\boldsymbol{C}}$]-груп $[A; B] \ni N$ □ G. Звідси, як і раніше, одержуємо справедливість леми. Нехай $\left|[A; B]\right| \leq 2$. Тоді $\left|[A; B]\right| = 2$. Звідси $\left|P\right| = p$ і Q – мінімальна нециклічна примарна група.

Якщо $B = G$, то твердження леми очевидне. Припустимо, що $B < G$. Тоді з дисперсивності G маємо $G = (U \leftthreetimes Q) \leftthreetimes V$ де U і V – холлівські підгрупи з G, всі силовські підгрупи з U циклічні, $U \neq 1$. Покладемо $N = U \leftthreetimes Q$. Тоді, знову за попереднім, ступінь розв'язності N обмежена фіксованим числом і оскільки $(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{N})'' = 1$ (твердження 1.1.11), то ступінь розв'язності G обмежена фіксованим числом. Лему доведено.

Т е о р е м а 3.1.2. *Нескінченна періодична локально ступінчаста недедекіндова УЩН[$\overline{\boldsymbol{C}}$]-група G є черніковською дисперсивною групою і ступінь її розв'язності обмежена фіксованим числом.*

Доведення. Нехай G – група з умови теореми. Як і в лемі 3.1.6 легко встановити, що G – локально скінченна група. Тому вона має локальну систему

$\{ G_\alpha \}$ скінченних підгруп G_α. Користуючись лемами 3.1.6 та 3.1.7 можна показати, що G_α – скінченна дисперсивна розв'язна група і її ступінь розв'язності обмежена фіксованим числом. З цього випливає, що G – розв'язна група і її ступінь розв'язності обмежена фіксованим числом.

Припустимо, що G – недисперсивна група. Тоді G – ненільпотентна група. Покажимо, що G – черніковська група. Припустимо, що G – нечерніковська група. Тоді в силу [131] для будь-якого g із G існує нечерніковська цілком факторизована g-допустима підгрупа F. Без порушення загальності можна вважати, що $F \cap <g> = 1$. Оскільки F – нечерніковська цілком факторизована абелева група, то легко встановити, що F містить підгрупу $F_1 = X^{\infty}_{i=1} B_i$, де B_i – допустима підгрупа відносно $<g>$, $B_i \neq 1$. Покладемо $D_1 = X^{\infty}_{\kappa=0} B_{4\kappa+1}$, $D_2 = X^{\infty}_{\kappa=0} B_{4\kappa+2}$, $D_3 = X^{\infty}_{\kappa=0} B_{4\kappa+3}$, $D_4 = X^{\infty}_{\kappa=1} B_{4\kappa}$. Зрозуміло, що D_l – допустима підгрупа відносно $<g>$, $l \in \{1,2,3,4\}$ і що $F_1 = D_1 \times D_2 \times D_3 \times D_4$.

Нехай $A_1 = D_1 \rtimes <g>$. Покажемо, що A_1 □ G. Ясно, що в G існують підгрупи $Y_4 = (D_1 \times D_2 \times D_3) \rtimes <g>$, $Y_3 = (D_1 \times D_2 \times D_4) \rtimes <g>$, $Y_2 = (D_1 \times D_4 \times D_3) \rtimes <g>$. Звідси випливає, що $|[A_1; Y_t]| > 2$, $t \in \{2, 3, 4\}$. За означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[A_1; Y_t] \ni N_t$ □ G. Нехай N – перетин всіх N_t. Тоді $A_1 \leq N$ □ G, а значить, $N \cap (D_2 \times D_3 \times D_4) = 1$. Звідси $N = A_1$ □ G. Аналогічно показуємо, що $A_2 = D_2 \rtimes <G>$ □ G. Тоді з рівності $A_1 \cap A_2 = <G>$ випливає нормальність $<g>$ в G і тому G – дедекіндова група. Суперечність. Отже, G – черніковська група.

Позначимо через R повну частину G. Зрозуміло, що $G = R \cdot D$, де D – скінченна підгрупа з G. Оскільки за попереднім G має локальну систему $\{G_\alpha\}$, G_α – дисперсивна і для деякого α $D \leq G_\alpha$, то D – дисперсивна група.

Нехай $D \cap R = N$. Тоді N □ G. Припустимо, що R не квазіциклічна група. Тоді R містить квазіциклічну p-групу A, $R > A$, в R існує q-елемент G такий, що $| g | = q^2$, $< g > \cap A = 1$. Звідси в R існує підгрупа $B = A \times <g>$. Зрозуміло, що $|[A; B]| > 2$ і за означенням УЩН [$\overline{C}$]-груп $[A; B] \ni N_1$□ G. Звідси A □ G. Оскільки G/A – УЩН[ ]-група, то в силу твердження 1.1.12 вона нільпотентна. Але тоді P/A □ G/A, де P/A – силовська p-підгрупа з G/A. Звідси одержуємо, що P – нормальна силовська p-підгрупа із G і тому G – дисперсивна група.

Нехай R – квазіциклічна p-підгрупа.Позначимо через P_1 – силовську p-підгрупу з D. Якщо P_1 □ D, то $D = P_1 \leftthreetimes V$, де V – дисперсивна холлівська підгрупа з D. Звідси $R \cdot P_1 = P$ – нормальна силовська p-підгрупа з G, тому $G = P \leftthreetimes V$ – дисперсивна група.

Припустимо, $P_1 \ntrianglelefteq D$. Зрозуміло, що $P = R \cdot P_1$ – силовська p-підгрупа з G і $P_1 \leq A$, де A – скінченна нециклічна підгрупа з P. Зрозуміло, що $|[A; P]| > 2$ і за означеннямУЩН [$\overline{C}$]-груп $[A; P] \ni N_1$ □ G. Звідси $D \cap N_1 = P_1$ □ D, що суперечить припущенню. Теорему доведено.

Т е о р е м а 3.1.3. *Нескінченні періодичні локально ступінчасті недисперсивні УЩН[$\overline{C}$]-групи G вичерпуються періодичними дедекіндовими групами, у яких $/ \pi (G) / = \infty$.*

Теорема 3.1.3 безпосередньо випливає з теореми 3.1.2.

3.2. Деякі наслідки

Т е о р е м а 3.2.1. *Нескінченні періодичні локально ступінчасті недедекіндові УЩН[$\overline{C}$]-групи G є розв'язними дисперсивними черніковськими групами виду $G = R \cdot D$, де R – центральна повна частина з G, що* *розкладається в прямий добуток не більше ніж двох квазіциклічних підгруп, D – скінченна дисперсивна група, G/R –УЩН [ ]-група*.

Доведення. Нехай G – досліджувана група. Припустимо, що G – недисперсивна група. Тоді завдяки теоремі 3.1.2 G – дедекіндова група, що не так. Одержана суперечність показує, що G – дисперсивна група. Як і в теоремі 3.1.2 встановлюємо, що G – черніковська розв'язна група з повною частиною R. Зрозуміло, що $G = R \cdot D$, $|R| = \infty$, D – скінченна дисперсивна група.

Покажемо, що $R \leq Z(G)$. Для цього покажемо спочатку, що будь-яка квазіциклічна підгрупа K із R нормальна в G. Якщо $K = R$, то $K \lhd G$. Якщо $K < R$, то як і в теоремі 3.1.2 одержуємо, що $K \lhd G$. Отже, завжди $K \lhd G$. Нехай g – довільний примарний елемент із G . Покажемо, що $[R, \langle g \rangle] = 1$. Для цього досить показати, що $[K, \langle g \rangle] = 1$. Припустимо, що $[K, \langle g \rangle] \neq 1$. Тоді існує не локально циклічна підгрупа $U = K\langle g \rangle$. Звідси U містить відрізок $[A ; B]$, де $g \in A$, A – нециклічна підгрупа, $|[A ; B]| > 2$, $|B| < \infty$. За означенням УЩН $[\overline{C}]$-груп $[A ; B] \ni N \lhd G$. Зрозуміло, що U/N – абелева група, $|U'| < \infty$ і, значить, $K \leq Z(U)$, що не так. Отже, $[K, \langle g \rangle] = [R, \langle g \rangle] = 1$ і тому $R \leq Z(G)$.

Припустимо, що $R \geq F = R_1 \times R_2 \times R_3$, де R_i – квазіциклічна підгрупа, $i \in \{1, 2, 3\}$. Нехай $H = R_1 \times R_2$. Тоді $F = H \times R_3$. Без порушення загальності міркувань можна вважати, що $F \cap \langle q \rangle < R_3$, тому існують підгрупи $U = F\langle g \rangle$, $U_i = R_i\langle g \rangle$, $U_1 \cap U_2 = \langle g \rangle$, $V = H\langle g \rangle$. Припустимо, що підгрупи U_1 і U_2 локально циклічні. Покладемо $A_1 = R_1 \times \langle g \rangle$, $B_1 = R_1 \times \langle a_1 \rangle \times \langle g \rangle$, $A_2 = R_2 \times \langle g \rangle$, $B_2 = \langle b_1 \rangle \times R_2 \times \langle g \rangle$, де $\langle a_1 \rangle$ та $\langle b_1 \rangle$ – циклічні неодиничні підгрупи непростих порядків. Зрозуміло, що підгрупи A_1 та A_2 – нециклічні, $|[A_1; B_1]| > 2$, $|[A_2; B_2]| > 2$ і $\langle g \rangle$ – силовська підгрупа з V. За означенням УЩН $[\overline{C}]$-груп $[A_1 ; B_1] \ni N_1 \lhd G$, $[A_2 ; B_2] \ni N_2 \lhd G$. Ясно, що $N_1 \cap N_2 = N \lhd G$ і $\langle g \rangle$ – силовська підгрупа з N. Звідси $\langle g \rangle \lhd G$ і, значить, G –

дедекіндова група. Суперечність. Отже, ніякі дві підгрупи U_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ не локально циклічні. Без порушення загальності можна вважати, що U_1 і U_2 – не локально циклічні r-групи. Звідси $< g > < V_1 < W_1 < U_2$, $< g > < V_2 < W_2 < U_3$, V_1 і V_2 – нециклічні підгрупи, $|[V_1; W_1]| > 2$, $|[V_2; W_2]| > 2$. За означенням УЩН[$\overline{C}$]-груп $[V_1; W_1] \ni M_1 \triangleleft G$, $[V_2; W_2] \ni M_2 \triangleleft G$. Зрозуміло, що $M_1 \cap M_2 = U_2 \cap U_3 = < g > \triangleleft G$ і, значить, G – дедекіндова група, що не так. Таким чином, R розкладається в прямий добуток не більше ніж двох квазіциклічних підгруп. Очевидно, що G/R – УЩН[ ]-група. Теорему доведено.

Н а с л і д о к 3.2.1. *Періодичні локально ступінчасті недисперсивні УЩН[$\overline{C}$]-групи є скінченними мінімальними недисперсивними групами та вичерпуються групами типів 1 – 4 теореми 3.1.1.*

Доведення наслідку безпосередньо випливає з теорем 3.1.1 та 3.1.2.

Т е о р е м а 3.2.2. *Періодичні локально ступінчасті недедекіндові УЩН($\overline{C}$)- та УЩН[$\overline{C}$)-групи G є розв'язними дисперсивними черніковськими групами.*

Доведення. Нехай G з умови теореми. Оскільки всяка УЩН($\overline{C}$)- і УЩН [$\overline{C}$)-група є УЩН [$\overline{C}$]-групою, то при $|G| = \infty$ твердження теореми випливає з теореми 3.2.1.

Нехай $|G| < \infty$. Тоді G – черніковська група. Покажемо, що G – дисперсивна група. Припустимо, що це не так. Тоді G задовольняє умову теореми 3.1.1 і G – група типу 1 – 4 згаданої теореми.

Нехай G – група одного з типів 1, 2 теореми 3.1.1. Тоді $G = D \cdot T$, де D – ненормальна силовська 2-підгрупа з G, $|D| \in \{8, 16\}$, T – ненормальна силовська 3-підгрупа з G, $|T| = 3$. Підгрупа D групи G типу 1 містить нециклічну підгрупу $X = <a> \times <b>$, $|a| = |b| = 2$, а підгрупа D групи G типу 2 містить підгрупу кватерніонів $X = <a> \cdot <b>$, $|X| = 8$. Звідси $|[X; G]| > 2$ і за означенням УЩН ($\overline{C}$)- та УЩН [$\overline{C}$)-груп $(X; G) \ni N \triangleleft G$ і $[X; G) \ni N \triangleleft G$. Зрозуміло, що $N < G$.

Нехай $D_1 = N \cap D$. Оскільки D – максимальна ненормальна підгрупа з G, то $D \not< N$. Звідси $D_1 < D$ і, значить, $D_1 = X$, при цьому в групі G типу 1 $N \cap A = \langle a \rangle$ □ G, $|a| = 2$, а в групі G типу 2 $N \cap A = \langle a \rangle$ □ G, $|a| = 4$. Останні співвідношення неможливі оскільки $A \leftthreetimes \langle c \rangle$ – група Шмідта. Отже, G не може бути групою типу 1, 2 теореми 3.1.1.

Припустимо, що G – група типу 3 чи 4 теореми 3.1.1. Тоді за теоремою Діксона [127, теорема 8.2.7] G має максимальну підгрупу Шмідта $M = A \leftthreetimes \langle c \rangle$, у якої: для груп G типу 3 A – група кватерніонів і всі власні нормальні підгрупи з G належать $\Phi(A)$; для груп G типу 4 A – група типу (2, 2), G – проста група. Зрозуміло, що $|[A ; G]| > 2$ і за означенням УЩН ($\overline{C}$)- та УЩН [$\overline{C}$]-груп $(A ; G) \ni N$ □ G, $[A; G) \ni N$ □ G, де $N < G$ і $|N| > 2$, що неможливо. Таким чином, G – скінченна дисперсивна і, значить, розв’язна група. Як і в теоремі 3.1.2 можна показати, що ступінь розв’язності G обмежена. Теорему доведено.

Т е о р е м а 3.2.3. *Періодичні локально ступінчасті недедекіндові недисперсивні УЩН($\overline{C}$]-групи G є скінченними мінімальними недисперсивними групами та вичерпуються групами типів:*

1) $G = A \leftthreetimes D$, A – група типу (2, 2), $D = Q \leftthreetimes \langle b \rangle$ – група Міллера-Морено, $Q = \langle c \rangle$, $|c| = 3$, $|b| \in \{2, 4\}$, $A \leftthreetimes \langle b \rangle$ та $A \leftthreetimes \langle c \rangle$ – групи Міллера-Морено;

2) $G = A \cdot D$, A □ G, A – група кватерніонів порядку 8, $D = Q \leftthreetimes \langle b \rangle$ – група Шмідта, $Q = \langle c \rangle$, $|c| = 3$, $\Phi(A) = \Phi(\langle b \rangle)$, $A \cdot \langle b \rangle$ – група кватерніонів порядку 2^4, $|b| = 4$, $A \leftthreetimes \langle c \rangle$ – група Шмідта;

3) $G \cong SL(2, 5)$;

4) $G \cong PSL(2, p)$, $p \in \{5, 13, 43, 67\}$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G – група з умови теореми. Оскільки УЩН ($\overline{C}$]-група є УЩН [$\overline{C}$]-групою, то завдяки теоремам 3.1.1 та 3.1.2 G – скінченна мінімальна недисперсивна група і є групою одного з типів 1 – 4 розглядуваної теореми. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G – група одного з типів 1 – 4 теореми. Очевидно, що G – періодична локально ступінчаста недедекіндова недисперсивна група. Покажемо, що G – УЩН($\overline{C}$]-група. Нехай $|[X; Y]| > 2$, X – нециклічна підгрупа. При $Y = G$ $(X ; Y] \ni N \trianglelefteq G$, що й потрібно було доказати. Отже, нехай $Y < G$. Тоді X належить деякій 3-максимальній підгрупі групи G. Покажемо, що в кожній групі типу 1 – 4 підгрупа X циклічна.

Нехай G – група типу 1, 2 теореми. Тоді кожна її максимальна підгрупа M_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ ізоморфна групі одного з типів: $M_1 \cong A \cdot \langle b\rangle \ntriangleleft G$, $A \langle b\rangle$ – силовська 2-підгрупа з G ; $M_2 \cong \langle c\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|c| = 3$, $|b| \in \{2, 4\}$, $b^{-1} c\, b = c^{-1}$; $M_3 \cong A \leftthreetimes \langle c\rangle$ – група Шмідта Зауважимо, що в групах G типу 1 A – група типу (2, 2) , $|b| = 2$, в групах G типу 2 A – група кватерніонів порядку 8, $|b| = 4$, $A \cdot\langle b\rangle$ – група кватерніонів порядку 2^4. Зрозуміло, що $[G : X]$ ділиться на добуток трьох простих чисел, Y належить M_i і , значить, $[Y : X]$ ділиться на добуток двох простих чисел.

Для груп G типу 1 $|G| = 2^3 \cdot 3$. Тоді $|X|$ – просте число і, значить, X – циклічна група.

Нехай G – група типу 2. Тоді Y належить M_i, $i \in \{1, 2, 3\}$. Якщо $Y \le M_1$, то $[Y : X]$ – ділиться на 4 і, значить, $|X| \le 4$. Звідси X – циклічна група. Нехай $Y \le M_2$. Оскільки в M_2 всі власні підгрупи циклічні, то X – циклічна група. Припустимо, що $Y \le M_3$. Оскільки M_3 – група Шмідта порядку $2^3 \cdot 3$ з нормальною силовською 2-підгрупою, то при $[Y: X]$ ділиться на 3 одержимо, що X – власна підгрупа групи кватерніонів порядку 8 і, значить, X – циклічна група. Нехай $[Y : X]$ не ділиться на 3. Тоді $|X|$ ділиться на 3 і в групі Шмідта

M_3 будь-яка максимальна підгрупа циклічна порядку 6. Звідси випливає, що X – циклічна група.

Нехай G – група типу 3, 4 розглядуваної теореми. Тоді за теоремою Діксона [127, теорема 8.2.7] G має максимальні підгрупи M_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ тільки одного з типів:

$M_1 \cong \langle a\rangle \langle b\rangle$, $|a| = p$, $|b| = (p - 1) / k$, $k \in \{1, 2\}$, при $k = 2$ $G \cong PSL(2, p)$, G – проста група, M_1 – група Фробеніуса, при $k = 1$ $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle f\rangle$, $|f| = 2$, $f \in Z(G)$, $G/\langle f\rangle \cong PSL(2, p)$, $M_1/\langle f\rangle$ – група Фробеніуса;

$M_2 \cong \langle b\rangle \cdot \langle d\rangle$, $|b| = (p - 1) / k$, $d^{-1}\ b\ d = b^{-1}$, $|d| = 4/k$, $k \in \{1, 2\}$, $|\langle b\rangle \cap \langle d\rangle| = 2^{k-1}$, при $k = 1$ $G \cong SL(2, p)$, при $k = 2$ $G \cong PSL(2, p)$;

$M_3 \cong \langle c\rangle \cdot \langle d\rangle$, $d^{-1}\ c\ d = c^{-1}$, $|c| = (p + 1)/ k$, $|d| = 4/k$, $k \in \{1, 2\}$, $|\langle c\rangle \cap \langle d\rangle| = 2^{k-1}$, при $k = 1$ $G \cong SL(2, p)$, при $k = 2$ $G \cong PSL(2, p)$;

$M_4 \cong F \leftthreetimes \langle q\rangle$ – група Шмідта, $|q| = 3$, $|F| = 8/k$, $k \in \{1, 2\}$, при $k = 1$ F – група кватерніонів порядку 8, $G \cong SL(2, p)$, при $k = 2$ F – група типу (2, 2), $G \cong PSL(2, p)$;

$M_5 \cong \langle q\rangle \leftthreetimes \langle d\rangle$, $|q| = 3$, $|d| = 4/k$, $d^{-1} q\ d = q^{-1}$, $k \in \{1, 2\}$, при $k = 1$ $G \cong SL(2, p)$, при $k = 2$ $G \cong PSL(2, p)$.

Зрозуміло, що $Y \leq M_i$, $[Y : X]$ ділиться на добуток двох простих чисел. В групах G типу 4 $|M_i|$ не ділиться на добуток чотирьох простих чисел і, значить, X – циклічна група. Якщо G – група типу 3, то при $i < 5$ $|M_i|$ не ділиться на добуток чотирьох послідовних чисел і тому знову X – циклічна група. Припустимо, що $i = 5$. Тоді M_5 ізоморфна групі M_2 із випадку, коли G – група типу 1, 2 теореми. Користуючись цим, одержуємо, що X – циклічна група.

Отже, завжди X – циклічна група, що суперечить вибору X. Одержана суперечність і закінчує доведення достатності. Теорему доведено.

Т е о р е м а 3.2.4. *Нескінченні періодичні локально ступінчасті недисперсивні ЩН[$\overline{C}$]-групи вичерпуються періодичними дедекіндовами групами, у яких* $|\pi(G)| = \infty$.

Доведення теореми безпосередньо випливає з теореми 3.1.3 і означення ЩН[$\overline{C}$]-груп.

Р О З Д І Л IV
РЕАЛІЗАЦІЯ МІЖПРЕДМЕТНИХ ЗВ’ЯЗКІВ У ПРОЦЕСІ ПІДГОТОВКИ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

4. 1. Методика навчання учнів доведенню теорем

4. 1. 1. Навчання готових доведень

Навчанням доведень називатимемо навчання готових доведень, пропонованих викладачем або підручником, і навчання учнів самостійного пошуку доведень, на відміну від А. А. Столяра, який навчання доведень розуміє як навчання розумових процесів пошуку, відкриттів і побудов доведення, а не навчання відтворення і заучування готових доведень. Наше розуміння загальної методичної проблеми навчання доведень пояснюється тим, що готові доведення мають велике значення у процесі навчання математики. За умови належної організації навчання готових доведень можна формувати в учнів компоненти самостійного пошуку і побудови доведення. Готові доведення мають виступати як моделі, на яких учні навчаються розумових дій і прийомів розумової діяльності, що покладено в основу вміння доводити, методів доведень та їх застосування, вчаться самостійно шукати доведення за аналогією з вивченим.

Проблему навчання доведень доцільно поділити на кілька навчальних завдань, які розв'язують послідовно: 1) вивчення готових доведень, вміння відтворювати їх; 2) самостійна побудова доведення за вивченим зразком; 3) пошук і виклад доведення за вказаним викладачем методом (способом); 4) самостійний пошук і виклад доведення учнями.

Для успішного навчання доведень потрібно, щоб учні оволоділи досить повною системою теоретичних знань і умінь (поняття та їх означення, аксіоми, теореми, уміння виконувати основні побудови тощо). Практика свідчить, що цього недостатньо для глибокого усвідомлення і сприйняття учнями готових доведень і самостійного їх відшукання. Використання елементів логіки (роз'яснення учням правил виведення, логічна організація навчального матеріалу) також не розв'язує проблеми ефективного навчання доведень. З цього приводу заслужена вчителька України В. М. Осинська зазначає, що в процесі засвоєння програмного матеріалу учні навчалися застосовувати елементи логіки і математичної символіки. Через два роки експериментальної роботи вона переконалася, що це дещо підвищило їхню математичну культуру. Особливо позитивний ефект був виявлений у здібних учнів, а середні й слабкі учні, як і раніше, погано міркували і розв'язували задачі. Навчання елементів логіки не полегшило засвоєння математики школярами з низьким рівнем розвитку.

Підготовка до навчання учнів доведеням здійснюється вже в 5 - 6 класах, де вони ознайомлюються з першими твердженнями і роблять перші кроки у виконанні дедуктивних умовиводів. Цілеспрямоване навчання доведенню починається з перших уроків систематичного курсу планіметрії введенням понять «теорема», «доведення теореми». Учні мають вчитися виконувати аналіз формулювання теореми, тобто відокремлювати умову від висновку. На перших етапах учні стикаються з труднощами, якщо теорему не сформульовано у формі умовного речення, тобто в термінах «якщо ..... то...». Для зменшення цих труднощів доцільно запропонувати їм усні вправи на виділення умови і висновку з відомих уже тверджень, на переформулювання твердження в умовне речення і відокремлення умови та висновку. Для прикладу наведемо такі твердження.

1. Якщо сума цифр ділиться на 3, то і число ділиться на 3.

2. Сума двох протилежних чисел дорівнює нулю.

3. Якщо чисельник дробу збільшити в кілька разів, то і дріб збільшиться в стільки само разів.

4. Зі збільшенням знаменника дробу в кілька разів дріб зменшується в стільки само разів.

Уміння доводити математичні твердження має чотири основні складові: 1) дія підведення об'єкта до поняття; 2) володіння необхідними і достатніми ознаками понять, про які йдеться у висновку; 3) дія вибору ознак понять, які відповідають заданим умовам; 4) дія розгортання умов.

З метою забезпечення свідомого засвоєння учнями готових доведень і навчання їх самостійно шукати доведення потрібно заздалегідь формувати ці складові. Наприклад, щоб навчити учнів дії розгортання умов, можна запропонувати їм такі усні вправи.

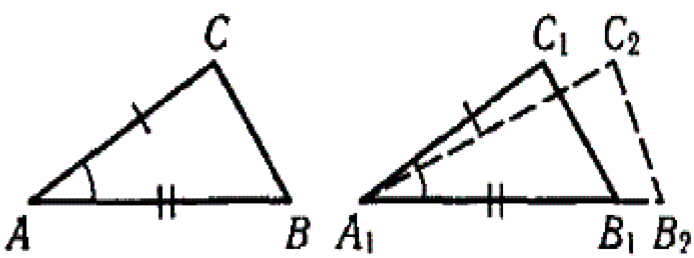
1. Дано два рівні суміжні кути ∠COB і ∠BOD. Що нам тим самим ще дано?

2. З точки М виходять два промені МА і МВ. Пряма CD перетинає промені в точках Е і F. Кути ∠AEC і ∠BFD, які при цьому утворилися, рівні. Що нам ще дано?

Розгортаючи умови, часто доходять висновку, що потрібно переформулювати висновок теореми або задачі. Прийом переформулювання висновку теореми або задачі сприяє формуванню вміння доводити твердження.

Наприклад, учням пропонують довести твердження: точки А, В і С лежать на одній прямій, якщо бісектриси прилеглих кутів ∠ABD і ∠DBC перпендикулярні. Учні мають міркувати так: оскільки потрібно довести, що точки А, В і С лежать на одній прямій, то досить довести, що маємо розгорнутий кут і що точка В є його вершиною, а точки А і С належать доповняльним півпрямим (сторонам розгорнутого кута).

Під час вивчення готових складніших доведень (наприклад, ознак рівності трикутників) доцільно запропонувати учням готову таблицю, в якій у лівому стовпчику записано твердження, з яких складається доведення, у правому - відповідні обґрунтування. Наведемо приклад такої таблиці (табл. 1) для першої ознаки рівності трикутників (рис. 1).



Дано: ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$

$AB = A_1B_1$

$AC = A_1C_1$

$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$

Довести: ΔABC і $= \Delta A_1B_1C_1$

Рис.1.

Демонструючи цю таблицю, потрібно спочатку закрити правий стовпчик і поступово відкривати його в міру того, як учні самостійно знаходитимуть потрібні обґрунтування.

Твердження	Обґрунтування
1. Існує $\Delta A_1B_2C_2$, рівний ΔABC, у якого одна вершина збігається з вершиною A_1, вершина B_2 лежить на промені A_1B_1, а C_2 — в одній площині з C_1 відносно прямої A_1B_1	1. За аксіомою про існування трикутника, рівного заданому
2. $A_1B_1 = A_1B_2$	2. Оскільки $A_1B_1 = AB$ за умовою, а $A_1B_2 = AB$ за означенням рівних трикутників
3. Точка B_2 збігається з B_1	3. За аксіомою про відкладання відрізка, рівного заданому
4. $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$	4. Оскільки $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$ за умовою, а $\angle B_2A_1C_2 = \angle BAC$ за означенням рівних трикутників
5. Промінь A_1C_2 збігається з променем A_1C_1	5. За аксіомою про відкладання кута, рівного заданому
6. $A_1C_1 = A_1C_2$	6. Оскільки $A_1C_1 = AC$ за умовою, а $A_1C_2 = AC$ за означенням рівних трикутників
7. Отже, $\Delta A_1B_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$	7. Оскільки їх вершини збіглися
8. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$	8. Оскільки $\Delta A_1B_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ за доведенням, а $\Delta A_1B_2C_2 = \Delta ABC$ за аксіомою про існування трикутника, рівного заданому

Таблиця 1. Доведення першої ознаки рівності трикутників

За цим зразком учні самостійно можуть скласти в зошитах аналогічну таблицю після вивчення другої ознаки рівності трикутників.

Такі таблиці доцільно складати учням після самостійного вивчення окремих найпростіших теорем на уроці за підручником.

Під час вивчення готових доведень теорем учні мають усвідомлювати істотні елементи доведення, відсторонюватися від неістотних (розміщення рисунка, позначення літерами) і помічати істотне спільне в доведеннях. Наприклад, істотним спільним у доведенні всіх трьох ознак подібності трикутників є те, що доведення кожної ознаки починається з виконання перетворення гомотетії одного з даних трикутників з коефіцієнтом, що дорівнює відношенню довжини сторони другого трикутника до довжини відповідної сторони першого. Доводиться, що отриманий при гомотетії допоміжний трикутник дорівнює першому, а отже, подібний другому з даних трикутників.

4. 1. 2. Навчання учнів самостійного пошуку доведень

Навчання учнів уміння самостійно здійснювати пошук доведення значною мірою залежить від володіння основними складовими уміння доводити і методами доведень.

У більшості теорем і задач на доведення процес доведення спрямований на те, щоб показати, що об'єкти, задані в умові теореми (задачі), містять необхідні й достатні або достатні ознаки понять, про які йдеться у висновку. У геометричних доведеннях такими поняттями можуть бути фігури, їхні властивості, відношення між фігурами. Тому учні мають навчитися розгортати умови, тобто діставати з умови ознаки шуканого поняття, оскільки в складніших теоремах ці ознаки подано в умові неявно, вони приховані за змістом інших понять.

При цьому цілеспрямований пошук потрібних ознак має відбуватися якнайкоротшим шляхом. Це можливо лише тоді, коли учень знає, де слід шукати потрібну ознаку. Для полегшення пошуку доцільно надавати учням набір «пошукових областей». Наприклад, якщо в умові теореми або задачі трапляються поняття «прямий кут», «рівні суміжні кути»»», «бісектриса розгорнутого кута», то кожне з цих понять містить умову перпендикулярності двох прямих. Після вивчення скалярного добутку двох векторів і означення й ознак перпендикулярності прямої та площини в 10 класі до «пошукових областей» для встановлення перпендикулярності двох прямих (відрізків) додаються ще дві ознаки: 1) дві прямі перпендикулярні, якщо скалярний добуток двох векторів, що лежать на кожній з цих двох прямих, дорівнює нулю; 2) дві прямі перпендикулярні, якщо одна з них перпендикулярна до площини, на якій лежить друга.

У процесі підготовки до пошуку складніших доведень можна скористатися правилами-орієнтирами, що вказують, як встановити найпоширеніші відношення між двома фігурами: рівність, подібність їх, паралельність прямих або відрізків. Наприклад, щоб довести рівність трикутників, досить: 1) підвести їх до однієї з ознак рівності або скористатися означенням рівних трикутників; 2) довести, що один з трикутників можна дістати з другого, виконавши деякий рух (симетрія, поворот, паралельне перенесення).

Для доведення рівності відрізків або кутів досить: 1) довести рівність трикутників або інших фігур, елементами яких є зазначені у вимозі відрізки (кути), а потім зробити висновок про рівність відповідних відрізків (кутів); 2) довести, що один відрізок (кут) можна отримати з другого, виконавши деякий рух.

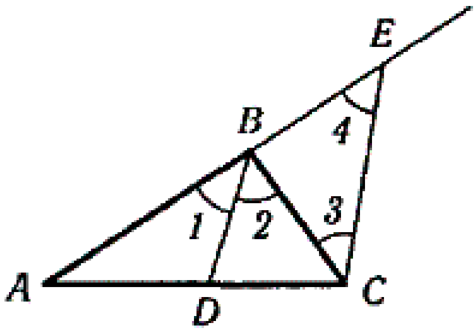
Після вивчення скалярного добутку двох векторів на площині й у просторі учнів ознайомлюють ще з одним способом доведення рівності відрізків і кутів - векторним.

Слід звернути увагу учнів і на те, що у зв'язку з доведенням рівності фігур часто користуються властивостями вимірювання відрізків та кутів і загальними властивостями величин: а) дві фігури рівні між собою, якщо кожна з них рівна третій; б) якщо від двох рівних відрізків (або кутів) відняти рівні відрізки (або кути), то дістанемо рівні відрізки (або кути). Те саме справедливе щодо додавання.

Необхідною умовою правильного вибору потрібної ознаки поняття, до якого підводиться об'єкт, є усвідомлення всіх істотних властивостей і ознак. З цього погляду важливо під час вивчення основних понять та їхніх відношень привести в систему ці властивості й ознаки і показати можливість їх використання.

Володіння методами доведень і вміння вибрати потрібний метод - важлива умова для забезпечення самостійного виконання доведення. В процесі навчання учнів самостійного пошуку доведень найважливішим є аналітичний метод. Навчати учнів володінню аналітичним методом найкраще у вигляді евристичної бесіди, використовуючи зразки доведень. Наведемо модель організації діяльності учнів під час використання аналітичного методу на прикладі задачі на доведення.

Приклад 2. Довести, що бісектриса BD внутрішнього кута трикутника ABC ділить протилежну сторону на відрізки AD і DC, пропорційні його сторонам BA і BC (рис.2).



Дано: ΔABC

BD - бісектриса $\angle ABC$

Довести: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Рис. 2.

Учитель. Звідки можна дістати пропорцію,яку потрібно довести?

Учень. Можна скористатися подібністю трикутників або властивістю відрізків, що відтинаються по сторонах кута трикутника прямою, паралельною протилежній стороні.

Учитель. Чи є на рисунку подібні трикутники?

Учень. Ні, немає.

Учитель. Як розміщені на рисунку перші три відрізки, що входять у пропорцію, яку потрібно довести?

Учень. Три з них розмішені на сторонах кута $\angle BAC$.

Учитель. На яку думку наштовхує нас цей факт?

Учень. Скористатися властивістю відрізків, що відтинаються на сторонах трикутника прямою, паралельною протилежній стороні.

Учитель. Де може лежати четвертий відрізок?

Учень. На продовженні сторони AB.

Учитель. Як його побудувати?

Учень. Продовжити сторону AB і через точку C провести пряму, паралельну BD, до перетину з прямою AB в точці E.

Учитель. Яку пропорцію тепер можна скласти?

Учень. $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BE}$

Учитель. Порівняйте цю пропорцію з тією, яку потрібно довести. Який висновок з цього можна зробити?

Учень. Потрібно довести, що BE = BC.

Учитель. Чим є на рисунку ці відрізки?

Учень. Сторонами ΔCBE.

Учитель. За якої умови дві сторони трикутника рівні?

Учень. Дві сторони трикутника рівні, якщо вони лежать напроти рівних кутів.

Учитель. Рівність яких кутів потрібно довести?

Учень. Потрібно довести, що $\angle 3 = \angle 4$. [39]

Після цього, виходячи з умови теореми, доводиться рівність зазначених кутів і робиться висновок про рівність відрізків.

Ознайомлювати учнів з аналітичним методом доведення та відповідним правилом-орієнтиром найзручніше на прикладі наведеної задачі, а застосувати його - під час доведення теорем про площі багатокутників.

У міру сформованості в учнів основних складових уміння доводити і набуття першого досвіду виконання доведень слід запропонувати евристичну схему пошуку доведення. Ця схема може мати такий вигляд:

1. Виділити те, що дано в умові, і вказати, що потрібно довести.

2. Ввести всі потрібні позначення. У геометричних теоремах (задачах) попередньо виконати рисунок.

3. Записати умову і висновок теореми (задачі) у символічній формі.

4. Назвати ознаки, потрібні для доведення.

5. Розгорнути умови, тобто з того, що дано, вивести можливі наслідки.

6. Порівняти з умовами та їхніми наслідками кожну з ознак, за якими можна довести те, що потрібно. Вибрати ознаку, зручну для доведення.

7. Якщо безпосередньо вибрати відповідну ознаку не вдається, подумати, які ще потрібні для доведення ознаки можуть бути задані в умові.

8. Постійно пам'ятати, що коли пошук доведення ускладнено, потрібно звертатися до даних і до того, що випливає з них.

Для геометричних доведень цю схему можна доповнити вказівками щодо геометричного рисунка: після виконання третього пункту схеми проаналізувати рисунок, позначити на ньому рівні елементи, прямі кути, паралельні відрізки та інші характерні особливості рисунка і окремих його елементів. Потім, виділивши на рисунку елементи фігур, відношення яких потрібно довести або які потрібно визначити, задати собі запитання: чим ще є або чим ще могли б бути дані елементи? Окремі елементи рисунка (відрізки, кути тощо) доцільно зіставляти з іншими елементами, включати їх до складу інших фігур, розглядати в різноманітних зв'язках з іншими елементами (прийом переосмислювання елементів задачі). Якщо на рисунку немає фігур або елементів, необхідних для використання ознак, за допомогою яких можна довести те, що потрібно, то слід виконати додаткові побудови і зробити всі висновки, що випливають з них.

Таку евристичну схему доцільно разом з іншими матеріалами помістити в математичному кабінеті на стенді «Учись учитися».

Неможливість і єдиність чого-небудь у математиці завжди доводять методом від супротивного. Інколи цим методом доводять обернені твердження.

4. 2. Методика вивчення основних методів доведень

4 . 2. 1. Суть і методика вивчення аналітичного методу доведення.

Суть аналітичного методу доведення полягає в тому, що вихідним пунктом, для обгрунтування необхідного твердження є саме це твердження, яке шляхом логічних обгрунтуваних кроків зводиться до твердження про яке наперед відомо, що воно істинне.

Щодо навчання учнів самостійного пошуку доведень, то найважливішим є аналітичний метод. Навчання учнів володіння аналітичним методом найкраще проводити на зразках доведень у вигляді евристичної бесіди.

Математика і методики її навчання містять два види аналітичних міркувань. Перший з них разом із синтетичним описав Евклід у своїх «Началах», хоча вони були відомі ще раніше Платону (428 - 348 до н. е.) й Арістотелю (384 - 322 до н. е.). Другий вид увів Папп (III ст.).

Навчально-теоретична модель аналітичного методу доведення може бути такою:

1. Змістовий аналіз твердження, виділення того, що дано в умові, і того, що вимагається довести у висновку.

2. Змістовий аналіз умови та висновку твердження, встановлення існуючих логічних зв’язків. Обґрунтування того, чи не є умова достатньою для того, щоб зробити висновок. Якщо так, то твердження є доведеним, якщо ні - то перейти до пункту 3.

3. Відшукання раніше доведеного твердження (аксіоми), з якого випливає висновок. Якщо його знайдено, то твердження є доведеним, якщо ні - то перейти до пункту 4.

4. Відшукання поки ще не доведеного твердження, якого достатньо, щоб зробити висновок.

5. Знаходження наступного твердження, яке є достатнім для того, щоб виконувалося попереднє твердження. Якщо знайдене твердження вже доведене або безпосередньо випливає з умови теореми, то твердження доведене. В іншому випадку - перейти до чергового виконання пункту 5.

6. Контроль виконаних дії у процесі застосування аналітичного методу доведення.

7. Змістовий аналіз та оцінка (самооцінка) засвоєння аналітичного методу доведення тверджень (знако-символьна фіксація). [36]

Правило-орієнтир аналітичного методу доведення може виглядати так.

1. Запитати: з якого раніше відомого твердження випливає висновок доводжуваного твердження? Іншими словами, знайти доведене раніше твердження (або аксіому), якої достатньо, щоб зробити висновок доводжуваного твердження.

2. Якщо такого раніше відомого твердження знайти не вдається, то треба шукати інше, поки ще не доведене твердження, з якого необхідно випливав би висновок доводжуваного.

3. Потім треба шукати наступне твердження, з якого випливало би попереднє, і так далі, поки не буде одержане твердження, яке безпосередньо випливає з умови теореми.

4. Зробити висновок, що дане твердження доведене, оскільки весь ланцюжок достатніх умов для виконання висновку задовольняється в силу умови доводжуваного твердження.

Ознайомити учнів з аналітичним методом доведення і відповідним правилом-орієнтиром найзручніше на прикладі задачі, а застосувати його - під час доведення теорем про площі многокутників.

Суть аналізу Евкліда можна пояснити на прикладі доведення нерівності.

Приклад 3. Довести нерівність $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$. Міркуватимемо так.

1. Припустимо,що задана нерівність правильна.

2. Виведемо з неї наслідки: помножимо обидві частини на $a^2 > 0$ ($a^2 \neq 0$ за умовою). Дістанемо $a^4 + 1 \geq 2a^2$.

3.Перенесемо $2a^2$ в ліву частину останньої нерівності. Дістанемо $a^4 - 2a^2 + 1 \geq 0$.

4. Запишемо ліву частину нерівності у вигляді квадрата двочлена: $(a^2 - 1)^2 \geq 0$.Остання нерівність правильна за будь-якого *a*.

Приклад 4. Доведіть, що при $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ виконується нерівність .$(a+2)(b+6)(c+3) \geq 48\sqrt{abc}$. [7]

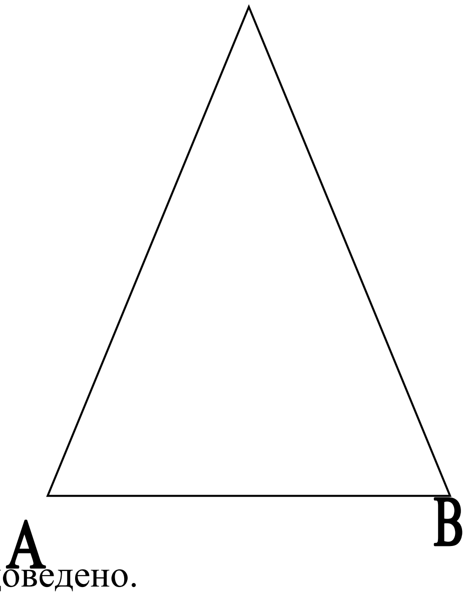
1. Скористаємося співвідношенням між середнім арифметичним і середнім геометричним невід’ємних чисел $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

2. Застосуємо співвідношення і отримаємо: $\frac{a+2}{2} \geq \sqrt{2a}$, $\frac{b+6}{2} \geq \sqrt{6b}$, $\frac{c+3}{2} \geq \sqrt{3c}$.

3. Тоді $\frac{(a+2)(b+6)(c+3)}{2\cdot2\cdot2} \geq \sqrt{2\cdot6\cdot3\cdot abc}$ або .$(a+2)(b+6)(c+3) \geq 48\sqrt{abc}$.

4. Нерівність виконується при $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

Отже, міркування виконувалися від того, що потрібно довести. При цьому з припущення правильності того, що слід довести (основа), виводились наслідки, які привели до очевидної правильної нерівності (наслідку).



Приклад 5. У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

Доведення.

Нехай ABC – рівнобедрений трикутник з основою AB (рис. 3). Доведемо, що в нього $\angle A = \angle B$. Трикутник CAB дорівнює трикутнику CBA за першою ознакою рівності трикутників. Справді, CA=CB, CB=CA, ∠C=∠C. З рівності трикутників випливає, що ∠A=∠B. Теорему доведено.

Рис. 3.

Такі аналітичні міркування називають аналізом Евкліда. Проте цей аналіз не можна вважати доведенням, хоча ми й дістали очевидну правильну нерівність, оскільки правильність наслідку ще не гарантує правильності основи. Справді, з хибної основи правильними міркуваннями можна дійти правильного наслідку. Наприклад, $-a = a$, де $a \neq 0$ - хибне твердження. Якщо піднести обидві частини цієї неправильної рівності до квадрата, дістанемо правильну рівність $a^2 = a^2$. Перехід від істинності наслідку до істинності основи можливий тільки тоді, коли основа і наслідок - правильні взаємно обернені судження.

Саме з цієї причини аналіз Евкліда не можна вважати доведенням, і тому його називають інколи «недосконалим аналізом».

На відміну від аналізу Евкліда аналіз Паппа відповідає всім вимогам доведення і тому його називають «досконалим аналізом», або аналітичним методом доведення. Паппа так характеризує аналітичний метод доведення: в аналізі шукане вважається знайденим, і визначаємо, звідки його було б отримано, і далі, що передувало б цьому останньому, доки не дійдемо до чого-небудь відомого - того, що могло б стати вихідним пунктом.

Логічною основою аналітичного методу, як і синтетичного, є аксіома: з правильного твердження завжди випливає правильний наслідок.

Схема міркувань при цьому така:

$B \leftarrow A_n \leftarrow A_2 \leftarrow A_1 \leftarrow A$

Відмінність аналізу Евкліда від аналітичного методу доведення (аналізу Паппа) полягає також у тому, що в аналізі Евкліда з припущення правильності доводжуваного виводять необхідні умови (наслідки), а в аналітичному методі добирають достатні умови для виконання висновку твердження, яке доводять.

4. 2. 2. Методика вивчення синтетичного методу доведення

Суть синтетичного методу полягає в тому, що відшукуються такі істинні твердження, які можна було шляхом логічних міркувань перетворити в дане твердження. При синтетичному методі не пояснюється чому за вихідне береться те чи інше твердження, тому доведення цим методом здається учням штучно видуманим.

Часто аналіз Евкліда допомагає знайти синтетичний метод доведення. У ньому міркування виконують від умови або від уже відомого твердження до доводжуваного. Якщо умову доводжуваного твердження (або відоме твердження) позначити літерою *A,* а висновок - *B,* то схема синтетичного методу матиме вигляд $\mathrm{A} \leftarrow \mathrm{A}_1 \leftarrow \mathrm{A}_2 \leftarrow \mathrm{A}_n \leftarrow \mathrm{B}$.

Приклад 6. Довести нерівність $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$.

1. Нехай $a \neq 0$. Відомо, $(a^2 - 1)^2 \geq 0$.

2. Запишемо ліву частину цієї нерівності у вигляді тричлена $a^4 - 2a^2 + 1 \geq 0$.

3. Розділимо обидві частини останньої нерівності на $a \neq 0$. Дістанемо $a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} \geq 0$.

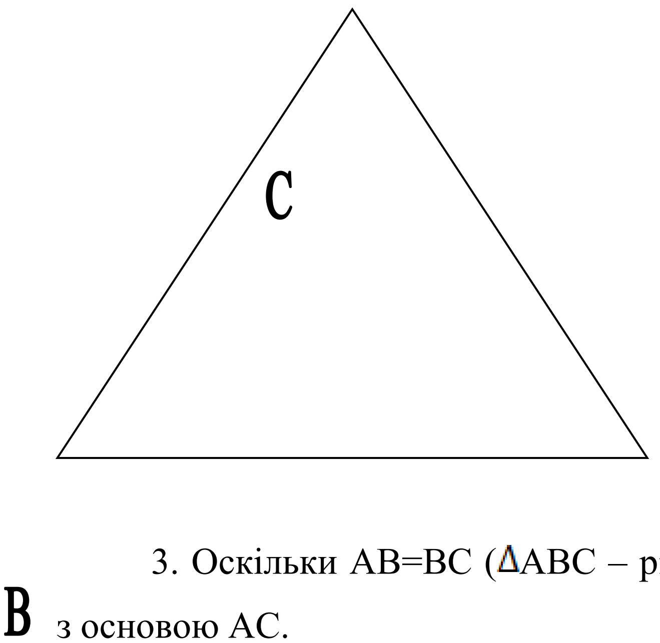
4. Перенесемо число -2 у праву частину нерівності. Дістанемо $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$, що й потрібно було довести.

Недоліком синтетичного методу доведення в розглянутому прикладі є неможливість (якщо не проведено аналіз Евкліда) здогадатися, що потрібно починати саме з нерівності $(a^2 - 1)^2 \geq 0$.

Приклад 7. Доведіть, що в рівностороннього трикутника всі кути рівні.

1. Нехай ∠A=∠B (рис. 4)

2. ΔABC – рівнобедрений (за теоремою у рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні) з основою AB.



3. Оскільки AB=BC (ΔABC – рівносторонній), то ΔABC – рівнобедрений з основою AC.

Рис. 4.

4. За теоремою (див. п. 2) ∠A=∠C.

5. Таким чином всі кути трикутника рівні ∠A=∠B=∠C. Теорему доведено.

Приклад 8. Довести, що $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$, коли $a + b = 1$

Доведення.

Виберемо як опорні такі два істинні твердження:

$(a + b)^2 = b^2 + 2ab + b^2 = 1$;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 > 0$.

Рівність $a^2 + 2ab + b^2 = 1$ і нерівність $a^2 - 2ab + b^2 > 0$ можна почленно додати, зберігаючи знак нерівності (Якщо $a < b$ і $c < d$ то $a+c<b+d$ тобто нерівності з однаковими знаками можна почленно додавати, зберігаючи знак нерівності.) . Одержимо $2a^2 + 2b^2 > 1$. Розділивши обидві частини нерівності на 2 (теорема якщо $a < b$ і c — додатне число, то $ac < bc$, якщо $a < b$ і c — від'ємне число, то $ac > bc$, тобто при множенні обох частин нерівності на додатне (від'ємне) число знак нерівності зберігається (змінюється на протилежний)) матимемо: $a^2+b^2>\frac{1}{2}$.

Далі міркуємо аналогічно: $(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b \geq \frac{1}{4}$,

$(a^2- b\ ^2)^2=a^4-2a^2b^2+b^2>0.$ Додамо почленно останні нерівності: $2a^4+2b^4 > \frac{1}{4}$;

$a^4+b^4\geq\frac{1}{8}$,що й потрібно було довести.

У геометричних доведеннях синтетичним методом важко здогадатися про додаткову побудову, яку часто в процесі доведення слід виконати.

Правило-орієнтир пошуку доведення синтетичним методом за допомогою аналізу Евкліда можна задати так.

1. Припустити, що висновок (вимога) теореми (задачі на доведення) правильний.

2. Вивести з цього припущення всі можливі наслідки.

3. Переконатися, що отриманий висновок-наслідок є або очевидною, або встановленою раніше істиною.

4. Взявши отриманий істинний висновок за вихідний, проаналізувати твердження у зворотному напрямі та перейти до висновку про правильність твердження, яке доводять.

Синтетичний метод разом з аналізом Евкліда особливо зручно використовувати для доведення нерівностей.

Деякі вчителі й автори методичних посібників часто доводять твердження аналітичним методом, а після цього виконують міркування у зворотному напрямі, тобто доводять твердження синтетичним методом, хоча в цьому немає потреби. У такому разі таке доведення безпідставно називають аналітико-синтетичним методом.

4. 2. 3. Методика вивчення та суть аналітико-синтетичного методу

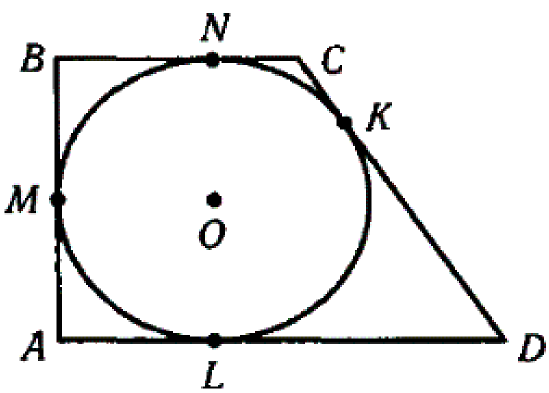
Аналіз і синтез обумовлюють одне одного і утворюють єдиний аналітико-синтетичний метод. В процесі навчання математики під аналізом розуміють прийом мислення при якому від наслідку приходять до причини, яка породила цей наслідок, а під синтезом – прийом мислення, при якому від причини переходять до наслідку , який породжується цією причиною. Без аналізу немає синтезу, а без синтезу немає аналізу.

Цей метод полягає в тому, що пошук доведення починають аналітичним методом, але міркування не доводять до кінця, а, спиняючись на певному кроці, починають міркувати у зворотному напрямі, тобто з розгортання умови. Отже, завершують доведення синтетичним методом.

Наведемо приклад розв'язування задачі на доведення цим методом.

Приклад 9**.** Довести, що у чотирикутника, описаного навколо кола, суми довжин протилежних сторін рівні (рис. 5).

Доведення. Щоб довести, що $AB + CD = BC + AD,$ досить довести, що $AM+ + BM + CK + IЖ = DL + AL + BN+CN,$ де $M,\ N,\ K,\ L$ - точки дотиків кола і чотирикутника.



Розгорнемо умову теореми. За властивістю дотичних, проведених з однієї точки до кола, $AM = AL,$ $BM =$ BN, $CK = CN,$

DK = *DL*. Додавши ці рівності почленно, дістанемо *AM* + *BM* + + *CK* + *DK* = *AL* + *BN* +*CN* + *DL*, що й потрібно було довести.

Рис. 5

Приклад 10. Доведіть, що коли в паралелограма всі кути рівні, то він прямокутник.

Доведення. Кути паралелограма, прилеглі до однієї сторони, є внутрішні односторонні, тому їх сума дорівнює 180°. За умовою ці кути рівні, тобто кожний з них прямий. А прямокутник – це паралелограм, у якого всі кути прямі. Теорему доведено.

У цих доведенях міркування здійснювалися послідовно: то від висновку теореми, то від умови. Рух з протилежних боків у загальному випадку виконують доти, доки міркування не дійдуть спільного твердження або суперечливих висновків. Цей метод особливо зручний, якщо перетворення лише умови чи лише висновку теореми (задачі) не приводить до мети.

Слід наголосити, що враховуючи вікові особливості учнів в одних класах переважають одні методи, в інших – інші. Так в 5-6 класах вивчення математики проводять переважно конкретно-індуктивним методом. Починаючи з 7 класу переважає абстрактно-дедуктивний метод.

4. 2. 4. Суть та методика вивчення методу доведення від супротивного.

Цей метод уводять уже в 7 класі на початку навчання курсу планіметрії. Його логічною основою є закон виключення третього: з двох супротивних тверджень одне завжди правильне, друге — неправильне, а третього бути не може. Завдяки цьому закону замість доведення певного твердження під час використання методу доведення від супротивного доводять, що супротивне йому твердження - неправильне, і на цій підставі роблять висновок, що правильне доводжуване твердження. При цьому стосовно супротивного твердження здійснюють аналіз Евкліда, з нього виводять наслідки.

Тому замість безпосереднього доведення даного твердження можна показати, що супротивне йому твердження неправильне. З цього випливатиме справедливість даного. При цьому стосовно супротивного твердження проводять аналіз Евкліда, з нього виводять наслідки. Деякі автори метод від супротивного ще називають непрямим, зведенням до абсурду. Доводячи методом від супротивного твердження: «Якщо P, то Q» (1) ми спочатку замінюємо його новим твердженням, оберненим протилежному: «Якщо Q, то P» (2) і доводимо це нове твердження. А тому, що ці два твердження завжди рівносильні, то з цього доведення випливає також справедливість даного твердження (1). Іноді з припущення виводять наслідок, який суперечить цьому самому припущенню або деякому вже обґрунтованому твердженню чи аксіомі. Це також свідчить про те, що припущення (твердження, супротивне доводжуваному) неправильне, а, отже, правильне доводжуване твердження.

Іноді, щоб показати абсурдність припущення, розбивають його на кілька випадків і розглядають кожний з них окремо. Такі доведення називають ще непрямими або роздільними.

Доводячи методом від супротивного, треба спростувати твердження, супротивне даному, а не протилежне, як неправильно пояснюється в багатьох підручниках і посібниках, бо для протилежних тверджень закон виключеного третього неправильний.

Нехай, наприклад, маємо твердження «P>Q». Супротивним і протилежним йому будуть відповідно твердження «P не більше Q» і «P<Q». Якщо ми хочемо довести методом від супротивного це твердження, то ми повинні показати, що твердження «P не більше Q» неправильне. Якщо ж ми покажемо, що неправильне твердження «P<Q», то з цього ще не випливатиме справедливість доводжуваного, бо може бути, «P=Q».

Після розгляду конкретних двох прикладів доведень методів від супротивного учні колективно складають його правило – орієнтир.

1. Припустити супротивне тому, що треба довести.

2. Користуючись припущенням, відомими аксіомами і раніше доведеними твердженнями шляхом міркувань дійти висновку, який суперечить одній з наведених умов:

- умові твердження, що доводиться;
- відомій аксіомі;
- раніше доведеному твердженню;
- припущенню.

3. Зробити висновок, що припущення - неправильне, а правильне те, що треба довести.

Досвід показує, що правило-орієнтир методу доведення від супротивного доцільно оформити у вигляді таблиці та вивішувати її кожного разу в подальшому вивченні курсу під час використання цього методу.

Слід рекомендувати учням письмово оформлювати доведення методом від супротивного у вигляді трьох кроків відповідно до правила-орієнтира; усні доведення також будувати за цією схемою. Після введення методу доцільно дати зразок такого оформлення.

Приклад 11. Довести, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму.

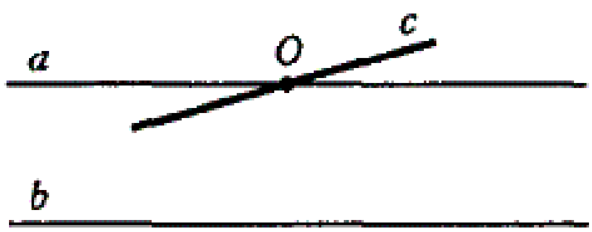


Рис. 6.

Дано: a, b, c — прямі;

c перетинає a в точці O.

Довести: с перетинає b.

Доведення.

1. Припустимо, що c і b не перетинаються, тобто що $c \| b$.

2.Тоді дістанемо,що через точку О перетину прямих a і c проходять дві різні прямі a і c, які паралельні прямі b. Проте це суперечить аксіомі про властивість паралельних прямих.

3. Висновок: припущення неправильне, а правильне те, що пряма с перетне пряму b.

Приклад 12. Через кожну точку прямої можна провести перпендикулярну до неї пряму і до того ж тільки одну.

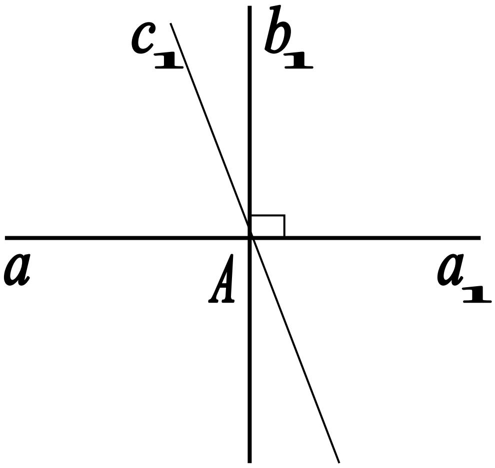


Рис. 7.

Доведення.

Нехай a – дана пряма і А – точка на ній. Позначимо через a_1 – одну з пів прямих прямої a з початковою точкою А (рис. 7). Відкладемо від пів прямої a_1 кут $(a_1\, b_1)$, що дорівнює 90°. Тоді пряма, яка містить промінь b_1, буде перпендикулярна до прямої a.

Припустимо, що крім побудованої прямої існує інша пряма, яка теж проходить через точку А і перпендикулярна до прямої a. Позначимо через c_1 півпряму цієї прямої, що лежить в одній півплощині з променем b_1.

Кути $(a_1\, b_1)$ і $(a_1\, c_1)$, кожен з яких дорівнює 90°, відкладемо в одній півплощині від прямої a_1. Але від прямої a_1 у даній півплощині можна відкласти тільки один кут, що дорівнює 90°. Тому не може бути іншої прямої, яка проходить через точку А і перпендикулярна до прямої a. Отримали суперечність. Теорему доведено.

Приклад 13. Якщо $\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} \varphi(x) = B$ причому в деякому околі точки a (крім, можливо, самої точки a) справедлива нерівність $f(x) \le \varphi(x)$, то $A \le B$.

Доведення. Припустимо протилежне, тобто що $A > B$. Вибиремо $\varepsilon > 0$ так, щоб 2 $\varepsilon -$ околи точок A і B: $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$ і $(B-\varepsilon; B+\varepsilon)$ не перетиналися, тобто $A-\varepsilon > B+\varepsilon$.

Оскільки $\lim_{x\to a} f(x) = A$, то знайдеться δ_1-окіл точки a, у якому $|f(x)-A| < \varepsilon$, тобто $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$. Також існує δ_2-окіл точки a, у якому $|\varphi(x)-A| < \varepsilon$, тобто $B-\varepsilon < \varphi(x) < B+\varepsilon$.

З чисел δ_1 і δ_2 вибиремо найменше і позначемо його δ. Тоді в δ – околі точки a маємо $\varphi(x) < B+\varepsilon < A-\varepsilon < f(x)$, і тому $f(x) > \varphi(x)$,але це не суперечить умові. Отже, $A \le B$. Теорему доведено. [29]

Приклад 15. Довести, що для будь-якого дійсного числа x виконується нерівність $(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}-3)(\mathrm{x}-4)(\mathrm{x}-6)+9>0$.

Доведення.

Припустимо протилежне, тобто, що існує принаймні одне дійсне значення x, для якого

$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 9 < 0$. Тоді, перетворюючи діву частину, матимемо:

$x^2-7\mathrm{x}+6)(x^2-7\mathrm{x}+12)+9<0;$

$(x^2-7\mathrm{x}+6)((x^2-7\mathrm{x}+6)+6)+9<0;$

$(x^2-7\mathrm{x}+6)^2+6(x^2-7\mathrm{x}+6)+9<0;$

$((x^2-7\mathrm{x}+6)+3)^2<0.$

Але квадрат числа не може бути від'ємним числом.

Отже, одержали суперечність, що вказує на хибність припущення та правильність вихідної нерівності

4. 2. 5. Методика вивчення та суть методу повної індукції та методу математичної індукції

Якщо, доводячи теорему, розчленовують її на скінченне число тверджень і доводять кожне з цих тверджень окремо, то такий метод доведення називають методом повної індукції.

Логічною основою цього методу є така аксіома логіки: якщо якусь властивість мають всі елементи множини А і всі елементи множини В і якщо множина М є сума множин А і В, то цю саму властивість має і кожен елемент множини М.

Приклад 16. Доведіть, що кожне натуральне число n, яке задовольняє нерівність $1 < n \leq 14$, або просте, його можна подати у вигляді добутку не більше як трьох простих множників.

Розв´язування

Розглянемо натуральні числа від 2 до 14. Серед цих чисел 2, 3, 5, 7, 1 і 13 – прості, а числа 4, 6, 9, 10, 14, - можна подати у вигляді добутку множників.

Метод повної індукції приводить до цілком надійних висновків. А як же дізнатися чи справедливі ці твердження взагалі? Дати відповідь на це запитання вдається шляхом застосування особливого методу міркування, який називається методом математичної індукції.

Метод математичної індукції. Логічною основою цього методу є принцип математичної індукції, взятий в шкільному курсі за аксіому: якщо твердження *A(n),*яке залежить від натурального числа *n,* виконується для n =1 і з припущення, що воно виконується для натурального числа $n = k$, випливає, що воно виконується і для $n = k + 1$, то це твердження виконується для будь-якого натурального числа *n.*

Правило-орієнтир доведення методом математичної індукції містить три кроки.

1. Перевірити правильність твердження для $n = 1$.

2. Припустити, що твердження правильне за $n=k$; довести, використовуючи це припущення, що твердження правильне за $n = k + 1$, тобто для наступного значення n.

3. Зробити висновок, що на підставі принципу математичної індукції твердження правильне для будь-якого натурального n.

Відомо, що будь-яке доведення - це дедуктивне міркування. Метод математичної індукції не є винятком, хоча історично в його назві є термін «індукція». Справді, на першому кроці в цьому методі виконують індуктивне міркування, але завдяки посиланню на загальне, раніше відоме твердження - принцип математичної індукції (аксіому) в третьому кроці, в цілому міркування, які здійснюють у методі математичної індукції, дедуктивні.

Приклад 17. Довести, що $2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)! > ((n+1)!)^n$, де $n \in N, n > 1$.

Доведення

1. Перевіримо правильність нерівності, якщо n = 2. У лівій частині маємо $2!\cdot 4! = 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 48$, а в правій $((2+1)!)^2 = (3!)^2 = 6^2 == 36$. Оскільки 48 > 36, то для $n = 2$ нерівність правильна.

2. Припустимо, що дана нерівність правильна, якщо $n = к$, тобто $2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2k)! > ((k+1)!)^k$.

3. Доведемо, що вихідна нерівність правильна і для $n = к + 1$, тобто $2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2k)!\cdot(2(k+1))! > ((k+2)!)^{k+1}$.

Справді, $2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2k)!\,(2(k+1))! > ((k+1)!)^k\cdot(2(k+1))!$, оскільки за припущенням $2!\cdot 4!\cdot\ldots(2k)! > ((k+1)!)^k$.

Але

$$\big(2(к+1)\big)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot\big(2(k++1)\big) = (k+1)!\,(k+2)(k+3)\cdot\ldots\cdot(2(k+1)).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. ***Dedekind R.*** Uber Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind // Math. Ann. – 1897. – 48. – S. 548 – 561.
2. ***Miller G.A., Moreno H. C.*** Non-abelian groups in which every subgroups is abelian // Trans. Amer. Math. Soc. – 1903. – 4. – P. 398 – 404.
3. ***Шмидт О.Ю.*** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. – 1924. – 31. – С. 366 –372.
4. ***Шмидт О.Ю.*** Группы, имеющие только один класс неивариантных подгрупп // Мат. сб. – 1926. – 33.– С. 161 – 172.
5. ***Шмидт О.Ю.*** Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп // Труды семинара по теории групп. – М., Л.: Наука. – 1938. – С. 7 – 26.
6. ***Baer R.*** Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe // S. – B. Heidelberg. Akad.- 1933. – 2. – S.12 – 17.
7. ***Baer R.*** Groups with descending chain conditions // Duke Math. J.–1949.–16.–P. 1 – 22.
8. ***Hall P.*** Finiteness conditions for soluble groups // Proc. London Math. Soc.– 1954.–4.– P. 419 – 436.
9. ***Hall P.*** On the finiteness of certain soluble groups // Proc. London Math. Soc.– 1959.–9.– P. 595 – 632.
10. ***Hall P.*** The Frattini subgroup of finitely generated groups // Proc. London Math. Soc.– 1961.–11.– P. 327 – 352.
11. ***Neuman B.H.*** Groups covered by permutable subsets // J. London Math. Sos. – 1954. – № 114. – P. 236 – 248.
12. ***Курош А.Г., Черников С.Н.*** Разрешимые и нильпотентные группы // Успехи мат. наук. – 1947. – Т.2, № 3. – С. 18 – 59.
13. ***Черников С.Н.*** К теории конечних p-расширений абелевых p-групп // Докл. АН СССР.–1947.– Т.58, № 6 . – С.1287 – 1289.

14. ***Черников С.Н.*** Условия конечности в общей теории групп // Успехи матем. наук.–1959.– 14, № 5.–С. 45 – 96.

15. ***Черников С.Н.*** Бесконечные группы с некоторыми заданными свойствами системы их бесконечных подгрупп // Докл. АН СССР. – 1964. – Т.159, № 4. – С. 759 – 760.

16. ***Черников С.Н.*** Группы с заданными свойствами системы бесконечных подгрупп // Там. же. – 1966. – Т.171, № 4. – С. 806 – 809.

17. ***Черников С.Н.*** Группы с заданными свойствами системы бесконечных подгрупп // Укр. мат. журн. – 1967. – Т.19, № 6. – С. 111 – 131.

18. ***Черников С.Н.*** Исследования групп с заданными свойствами подгрупп // Укр. мат. журн. – 1969. – Т.21, № 2. – С. 193 – 200.

19. ***Черников С.Н.*** Бесконечные неабелевы группы с условием инвариантности для бесконечных неабелевых подгрупп // Докл. АН СССР. – 1970. – Т.194, № 6. – С. 1280 – 1283.

20. ***Черников С.Н.*** Бесконечные неабелевы группы, в которых инвариантны все бесконечные неабелевые подгруппы // Укр. мат. журн. – 1971. – Т.23, № 5. – С. 604 – 628.

21. ***Черников С.Н.*** О группах с ограничениями для подгрупп // Группы с ограничениями для подгрупп. – К.: Наук. думка, 1971. – С. 17 – 39.

22. ***Черников С.Н.*** Группы с инвариантными бесконечными абелевыми подгруппами // Там. же. – С. 47 – 65.

23. ***Черников С.Н.*** Бесконечные неабелевы группы с условием минимальности для неинвариантных абелевых подгрупп // Там. же. – С. 106 – 115.

24. ***Черников С.Н.*** Группы, имеющие сепарирующие подгруппы // Группы с заданными свойствами подгрупп. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1973. – С. 6 – 14.

25. ***Черников С.Н.*** Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

26.***Зайцев Д.И., Каргаполов М.И., Чарин В.С.*** Бесконечные группы с заданными свойствами подгрупп // Укр. мат. журн. – 1972. – Т.24, № 5. – С. 619 – 633.

27. ***Чарин В.С, Зайцев Д.И.*** Группы с условиями конечности и другими ограничениями для подгрупп // Укр. мат. журн. – 1988. – Т.40, № 3. – С. 277 – 287.

28. ***Казарин Л.С., Курдаченко Л.А.*** Условия конечности и факторзации в бесконечних группах // Успехи матем. наук.–1992.– 47, № 3.–С. 75 – 114.

29.***Чарин В.С.*** Замечание об условии минимальности для подгрупп // Докл. АН СССР. – 1949. – Т.66, № 4. – С. 575 – 576.

30.***Чарин В.С.*** О условии минимальности для нормальных подгрупп в локально разрешимых группах // Мат. сб.–1953.–33, № 1.– С.27 – 36.

31.***Курдаченко Л.А., Кузенний Н.Ф., Семко Н.Н.*** Группы с некоторыми условиями максимальности // Докл. АН УССР.– 1987.–№ 1. – С.9 – 11.

32. ***Cutolo G.*** On groups satisfying the maximal condition on non-normal subgroups // Riv. Mat. Pura. Appl.–1991.–9.–P. 49 – 59.

33.***Cutolo G., Kurdachenko L.A.*** Groups with a maximality condition for some non-normal subgroups // Geometriae Dedicata.–1995.–55.– P. 279 – 292.

34.***Franciosi S., de Giovanni F. and Kurdachenko L.A.*** On groups with many almost normal subgroups // Annali Mat.–1995.–169.–P. 35 – 65.

35.***Лиман Ф.М.*** Групи з інваріантними нециклічними підгрупами // Доп. АН УРСР. – 1967. – № 12. – С. 1073 – 1075.

36.***Лиман Ф.М.*** 2-группы с инвариантными нециклическими подгруппами // Мат. заметки. – 1968. – Т.4, № 1. – С. 75 – 83.

37.***Лиман Ф.М.*** *Р*-групи, всі абелеві нециклічні підгрупи яких інваріантні // Доп. АН УРСР. – 1968. – № 8. – С. 696 – 699.

38.***Лиман Ф.М.*** Непериодические группы с некоторыми системами инвариантных подгрупп // Алгебра и логика. – 1968. – Т.7, № 4. – С. 70 – 86.

39.***Лиман Ф.М.*** Неперіодичні групи, всі абелеві нециклічні підгрупи яких інваріантні // Доп. АН УРСР. – 1969. – № 1. – С. 11 – 13.

40.***Лиман Ф.М.*** Периодические группы, все абелевы нециклические подгруппы которых инвариантны // Группы с ограничениями для подгрупп. – К.: Наук. думка, 1971. – С. 65 – 96.

41. ***Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф.*** О метагамильтоновых группах I // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1966. – Т.5, № 3. – С. 45 – 49.

42.***Сесекин Н.Ф.***, ***Ромалис Г.М.*** О метагамильтоновых группах II // Там. же. – 1968. – Т.6, № 5. – С. 50 – 53.

43.***Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф.*** О метагамильтоновых группах III // Там же. – 1970. – Т.7, № 3. – С. 195 – 199.

44.***Нагребецкий В.Т.*** Конечные ненильпотентные группы, любая неабелевая подгруппа которых инвариантна // Там же. – 1967. – Т.6, № 1. – С. 80 – 88.

45.***Махнев А.А.*** О конечных метагамильтоновых группах // Там же. – 1976. – Т.10, № 1. – С. 60 – 75.

46.***Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.*** Строение разрешимых ненильпотентных метагамильтоновых групп // Мат. заметки. – 1983. – Т.34, № 2. – С. 179 – 188.

47.***Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф.*** Строение метациклических метагамильтоновых групп. – К.: Киев. пед. ин-т, 1983. – 22 с.

48.***Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф.*** О строении бесконечных нильпотентных периодических метагамильтоновых групп // Строение групп и их подгрупповая характеризация. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 101 – 111.

49.***Кузенний М.Ф., Семко М.М.*** Будова розв’язних метагамільтонових груп // Доп. АН УРСР. – 1985. – № 2. – С. 6 – 9.

50.***Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.*** О строении непериодических метагамильтоновых групп // Изв. вузов. Математика.– 1986. – № 11. – С. 32 – 40.

51.***Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.*** Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом // Укр. мат. журн. – 1987. – Т.39, № 2. – С. 180 – 185.

52.***Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф***. Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга два // Там же. – 1987. – Т.39, № 6. – С. 743 – 750.

53.***Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф***. Строение метациклических метагамильтоновых групп // Современный анализ и его приложения. К.: Наук. думка, 1989. – С. 173 – 183.

54.***Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.*** О строении периодических неабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга три // Укр. мат. журн. – 1989. – Т.41, № 2. – С. 170 – 176.

55.***Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н.*** О метагамильтоновых группах с элементарным коммутантом ранга два// Там же. – 1990. – Т.42, № 2. – С. 168 – 175.

56.***Кузенний М.Ф., Семко М.М.*** Метагамільтонові групи та їх узагальнення. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – 232 с.

57.***Черніков М.С.*** Групи, в яких інваріантна кожна абелева підгрупа, що не збігається зі своїм нормалізатором // Доп. АН УРСР. – 1974. – № 11. – С. 977 – 978.

58.***Черников М.С.*** Группы, в которых инвариантны все абелевы подгруппы, отличные от своих нормализаторов // Теоретико-групповые исследования. – К.: Наук.думка, 1978. – С. 117 – 127.

59.***Курдаченко Л.А., Пылаев В.В.*** О группах, двойственных дедекиндовым // Докл. АН УССР. – 1989. – № 10. – С. 21 – 22.

60.***Коваленко В.І.*** Будова скінченних недисперсивних груп, в яких кожна неметациклічна підгрупа нормальна // Укр. мат. журн.– 1996. – Т. 48, № 10.– С. 1337 – 1342.

61.***Mann A.*** Groups with dense normal subgroups // Israel J. Math. – 1968. – 6, №1. – P. 13 – 25.

62.***Семко М.М.*** Групи з умовами щільності нормальності та її узагальнень для деяких систем підгруп. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 285 с.

63.***Семко М.М.*** Про будову груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп.– К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 90 с.

64.***Семко М.М.*** Будова груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 63 с.

65.***Семко М.М.*** Класи груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 62 с.

66.***Семко М.М.*** Будова локально ступінчастих ЩН[ ]–груп // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Ін–т математики НАН України, 1996. – Вип. 12. – С. 181 – 186.

67.***Семко М.М.*** Про будову УЩН[ ]–групп // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Ін–т математики НАН України, 1996. – Вип. 13. – С. 196 – 203.

68.***Семко М.М.*** Будова нільпотентних УЩН[ ]-груп // Класи груп з обме-женнями для підгруп.– К.: Ін–т математики НАН України, 1997.– С. 27 – 41.

69.***Семко М.М.*** Будова локально ступінчастих ненільпотентних УЩН[ ]-груп // Укр. мат. журн.– 1997. – Т. 49, № 6.– С. 789 – 798.

70.***Семко М.М.*** Ненільпотентные групи з узагальненою щільністю нормальності для підгруп // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Ін–т математики НАН України, 1997. – Вип. 15. – С. 175 – 187.

71. ***Семко М.М.*** Про групи з умовами щільності нормальності для підгруп // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач.– К.: Ін–т математики НАН України, 1997. – Вип. 16. – С. 255 – 263.

72. ***Семко М.М.*** Будова одного класу груп з умовами щільності нормальності для підгруп // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 8.– С. 1148 – 1151.

73. ***Семко М.М.*** Про будову УЩН[ ]-груп з елементарним комутантом рангу два // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 10.– С. 1396 – 1403.

74. ***Семко М.М.*** Будова груп з деякою умовою щільності нормальності для підгруп // Доп. НАН України. – 1997.– № 9. – С. 49 – 53.

75. ***Семко М.М.*** Будова груп з деякими умовами щільності нормальності для підгруп // Доп. НАН України. – 1997.– № 10.– С. 43 – 46.

76. ***Семко М.М.*** Про будову УЩН[ ]-груп // Укр. мат. журн. –1998.– Т.50, № 9. – С. 1250 – 1261.

77. ***Семко М.М.*** Будова метациклічних і мінімальних неметациклічних УЩН[ ]-груп // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – Вип. 1 (17).– С. 230 – 237.

78. ***Семко М.М.*** Будова локально ступінчастих УЩН( ]-груп // Укр. мат. журн.– 1998. – Т.50, № 11. – С. 1532 – 1536.

79. ***Семко М.М.*** Будова локально ступінчастих УЩН[ )-груп // Укр. мат. журн. – 1999. – Т.51, № 3. – С. 383 – 388.

80. ***Горецкий В. Э.*** Группы с плотной системой бесконечных инвариантных абелевых подгрупп // Теоретико-групповые исследования. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 127 – 138.

81. ***Устюжанинов А.Д.*** Конечные группы с инвариантными нециклическими подгруппами // Мат. зап. Урал. ун-та.– 1967. – Т.6, № 1. – С. 107 – 128.

82. ***Мазуров В.Д.*** Пример гуппы Фробениуса с неразрешимым дополнительным множителем // Мат. зап. Урал. ун-та.– 1963. – Т. 4, № 1. – С. 282 – 285.

83. ***Кузенный Н.Ф., Левищенко С.С., Семко Н.Н.*** О группах с инвариантными бесконечными неабелевыми подгруппами // Укр. мат. журн. – 1988. – Т.40, № 3. – С. 314 – 322.

84. ***Кузенный Н.Ф., Левищенко С.С., Семко Н.Н.*** Группы с инвариантными бесконечными неабелевыми подгруппами // Методы исследований алгебраических и топологических структур. – К.: Киев. пед. ин-т, 1989. – С. 37 – 45.

85. ***Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я.*** Новые характеризации локально нильпотентных $\overline{IH}$ -групп // Укр. мат. журн. – 1988. – Т. 40, № 3. – С. 322 – 326.

86. ***Hobby C.*** Finite groups with normal normalizers // Canad. J.Math.– 1968. – 20, № 5. – P. 1256 – 1260.

87. ***Казарин Л.С.*** Группы с некоторыми условиями, наложенными на нормализаторы подгрупп // Ученые записки Пермского ун-та. – 1969. – № 218.– С. 268 – 279.

88. ***Bernstein H.J.*** CCN-groups of order divisible by tree primes // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969.– 22, № 1. – P. 202 – 205.

89. ***Субботин И.Я.*** Конечные группы, в которых каждая подгруппа коммутанта инвариантна // Матем. заметки. – 1972. – Т.12, № 6. – С. 739 – 746.

90. ***Субботин И.Я***. Бесконечные конечнопорожденные группы, в которых каждая подгруппа коммутанта инвариантна // Укр. мат. журн. – 1975. – Т.27, № 3. – С. 406 – 411.

91. ***Субботин И.Я.*** О бесконечных группах, в которых каждая подгруппа коммутанта инвариантна // Конструктивное описание групп с заданными свойствами подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 92 – 107.

92. ***Giordano G.*** Gruppi con normalizzatori estremali // Matematiche.– 1971. – 26, № 2. – P. 291 – 296.

93. ***Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я.*** Группы, в которых все подгруппы пронормальны // Укр. мат. журн. – 1987.– Т.39, № 2. – С. 180 – 185.

94. ***Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф.*** Локально разрешимые группы, в которых все бесконечные подгруппы пронормальны // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 3. – С. 77 – 79.

95. ***Кузенный Н.Ф., Субботин И.Я.*** Группы с пронормальными примарными подгруппами // Укр. мат. журн. – 1989. – Т.40, № 3. – С. 323 – 327.

96. ***Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф.*** О группах, все подгруппы которых имеют веер заданного вида // Там же. – 1990.– Т.41, № 9. – С. 1232 – 1236.

97. ***Гольденберг М.М., Сесекин Н.Ф.*** Бесконечные локально конечные p-группы с инвариантными не вполне расщепляемыми подгруппами // Уч. зап. Свердл. гос. пед. ин-та. – 1971.– № 125. – С. 13 – 18.

98. ***Семко Н.Н.*** Некоторые виды неабелевых групп с заданной системой инвариантных бесконечных подгрупп // Конструктивное описание групп с заданными свойствами подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980.– С. 107 – 117.

99. ***Крайчук А.В.*** Группы с системами инвариантных подгрупп бесконечного индекса // Укр. мат. журн. – 1986. – Т.38, № 1. – С. 108 – 110.

100. ***Курдаченко Л.А., Пылаев В.В.*** О группах, двойственных дедекиндовым // Докл. АН УССР. – 1989. – № 10. – С. 21 – 22.

101. ***Fattahi F.*** Groups with only normal and abnormal subgroups // J. Algebra.– 1974.– 28, № 1. – P. 15 – 19.

102. ***Walls Gary L.*** Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups normal // Jsr. J. Math. – 1982. – 43, № 2. – P. 166 – 168.

103. ***Cappit D.*** Generalised Dedekind groups // J. Algebra. – 1971. – 17, № 3. – P. 310 –316.

104. ***Баранник А.Ф.*** Обобщение метагамильтоновых групп // Исследование групп по заданным свойствам подгрупп.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – С. 160 – 198.

105. ***Баранник А.Ф.*** О группах, близких к гамильтоновым // Материалы XXX научной конф. проф.-препод. состава. Секция матем. наук. – Ужгородск. ун-т. – Ужгород, 1977. – С. 46 – 54.

106. ***Баранник А.Ф.*** О группах, близких к гамильтоновым // Укр. мат. журн. – 1978. – Т.30, № 5. – С. 579 – 585.

107. ***Кузенний М.Ф., Семко М.М.*** Будова сепараторно дедекіндових груп // Укр. мат. журн. – 1996.– Т.48, № 10. – С. 1342 – 1351.

108. ***Best E., Taussky O.*** A class of groups // Proc. P.J.A. Sect. A. – 1942. – 47. – P. 55 – 62.

109. ***Gashutz W.*** Gruppen, in denen das Normalteiler sein transiv ist // J. reine und angew. Math. – 1957. – 198, № 1– 2.– S. 87 – 92.

110. ***Абрамовский М.Н., Каргаполов М.И.*** Конечные группы со свойством транзитивности для нормальных делителей // Успехи мат. наук. – 1957. – Т.13, № 3.– С. 242 – 243.

111. ***Robinson D.J.S.*** Groups in which normality is a transitive relation // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1964. – 60, № 21. – P. 21 – 38.

112. ***Robinson D.J.S.*** Groups whose images have a transitive normality relation // Lect. Notes. Math. – 1973.– № 319. – P. 148 – 155.

113. ***Giovani F., Franciosi S.*** Groups in which every infinite subnormal subgroup is normal // J. Algebra. – 1985.– 96, № 2. – P. 566 – 580.

114. ***Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф.*** О группах с условием транзитивности // Исследование групп с ограничением для подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 73 – 80.

115. ***Субботин И.Я., Кузенный Н.Ф.*** Локально разрешимые группы с условием транзитивности для бесконечных неабелевых нормальных делителей //

Методы исследований алгебраических и топологических структур. - К.: Киев. пед. ин-т, 1989. – С. 45 – 52.

116. ***Кузенний М.Ф., Зузук Л.І.*** Будова періодичних Т($\overline{A}$)-груп з абелевим локально нільпотентним корадикалом // Укр. мат. журн. – 1995. – Т.47, № 10. – С. 1361 – 1369.

117. ***Mann A.*** Finite groups with maximal normalizers // Isr. J. Math. – 1968. – 12, № 1. – P. 67 – 75.

118. ***Huppert B.*** Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen //Math. Z.–1954.– №4.– S. 409 – 434.

119. ***Холл М.*** Теория групп.– М.:Изд-во иностр. лит.,1962.– 468 с.

120. ***Курош А.Г.*** Теория групп.– М.: Наука, 1967.– 648 с.

121. ***Левищенко С.С., Семко Н.Н.*** Конструктивное описание конечных несверхразрешимых групп, у которых все *2*-максимальные подгруппы метациклические // Исследования групп с ограничениями для подгрупп. – Киев: Институт математики АН УССР, 1988.– С. 42 – 51.

122. ***Беляев В.В., Сесекин Н.Ф.*** О бесконечных группах типа Миллера-Морено //Acta math. Acad. Sci. Hung.– 26, № 3 – 4.– P. 369 – 379.

123. ***Левищенко С.С., Кузенный Н.Ф.*** Конечные группы с системами дисперсивных подгрупп. – К.: Институт математики НАН Украины, 1997. – 230 с.

124. ***Ольшанский А.Ю.*** Бесконечные группы с подгруппами простых порядков //Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – Т.44, №2. – С. 309 – 321.

125. ***Ольшанский А.Ю.*** Геометрия определяющих соотношений в группах. – М.: Наука, 1989. – 447 с.

126. ***Семко Н.Н.*** Строение локально метациклических групп //Строение групп и свойства их подгрупп.–К.: Институт математики АН УССР, 1986.– С. 83 – 93.

127. ***Huppert B***. Endliche Gruppen I.– Berlin-Heidelberg-New-York:Springer-Verlag, 1967.– 793 s.

128. ***Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И***. Основы теории групп.– М.: Наука, 1982.– 288 с.

129. ***Бусаркин В.М., Горчаков Ю.М.*** Конечные расщепляемые группы.– М.: Наука, 1967.– 111 с.

130. ***Кузенный Н.Ф.,*** Об изоморфизме полупрямых произведений // Укр. мат. журн. – 1974. – Т.26, № 5. – С. 652 – 658.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ

Список публікацій Семка М.М.

Публікації у журналах,
які індексуються у наукометричній базі Scopus:

1. Kurdachenko L.A, Semko N.N., Subbotin I.Y. On the anticommutativity in Leibniz algebras //Algebra and Discrete Mathematics, 2018, 26(1), 97-109.

2. Чупордя В.А., Пипка О.О., Семко М.М., Ящук В.С. Алгебри лейбніца: короткий огляд сучасних результатів //Карпатські математ. публ., 2019, 11(2), 250-257.

3. Dixon M.R., Kurdachenko L.A, Semko N.N., Subbotin I.Y. On some topics in the theory of infinitr dimensional linear groups //Algebra and Discrete Mathematics, 2020, 29(1), 1-32.

4. Semko N.N., Skaskiv L.V., Yarovaya O.A. Leibniz algebras, having a dense family of ideals // Carpathian Math. Publ. 2020, 12 (2), 451–460.

5. Semko N.N., Skaskiv L.V., Yarovaya O.A. Linear groups saturated by subgroups of finite central dimension // Algebra and Discrete Mathematics, 2020, 29(2), 180-194.

6. Chupordia V.A., Kurdachenko L.A, Semko N.N. On the structure of Leibniz algebras, whose subalgebras are ideais or core-free // Algebra and Discrete Mathematics, 2020, 29(1), 1-32.

7. Kurdachenko L.A, Semko N.N. On thestructure of some groups having finite contranormal subgroups // Algebra and Discrete Mathematics, 2021,31(2), 109-119.
8. Kuzennyi N. F., Levchenko S.S., Semko N. N. Correction to: Groups with Invariant Infinite Non-Abelian groups // Ukrainian Mathematical Journal, 2022
9. Kurdachenko L.A, Semko M.M., Yashchuk V.S. On the structure of the algebra of derivations of cyclic Leibniz algebras //Algebra and Discrete Mathematics, 2022,32(2), 241-253.
10. Semko N.N., Skaskiv L.V., Yarovaya O.A. On the derivations of cyclic Leibniz algebras // Carpathian Math. Publ. 2022, 14 (2), 345–353.
11. Kurdachenko L.A, Semko M.M., Yashchuk V.S. On the algebra of some nilpotent Leibniz algebras // Researches in Mathematics, 2023, 31(1), 62-71.
12. Kurdachenko L.A, Pypka O.O., Semko M.M. Description of the automorphism of some Leibniz algebras // Researches in Mathematics, 2023, 31(1), 52-61.

Статті у фахових журналах

1. Kurdachenko L.A, Subbotin I.Y., Semko N.N. On analogs of some group-theoretic concepts and results for Leibniz algebras //Доповіді НАН України, 2018, 10-14.
2. Kurdachenko L.A, Semko N.N., Subbotin I.Y. On the role playedly by anticommutativy in Leibniz algebras // Доповіді НАН України, 2019, 1, 3-9.
3. Kurdachenko L.A, Semko N.N., Subbotin I.Y. A generalization of the malnormal subgroups // Доповіді НАН України, 2019, 3, 25-28.
4. Semko N.N., Skaskiv L.V., Yarovaya O.A. Linear groups saturated by subgroups of finite central dimension // Доповіді НАН України, 2019, 6, 3-7.
5. Chupordia V.A., Kurdachenko L.A, Semko N.N. On the structure of Leibniz algebras, whose subalgebras are ideais or core-free // Доповіді НАН України, 2020, 7, 17-21.
6. Chupordia V.A., Kurdachenko L.A, Semko N.N. On the structure of Leibniz algebras, whose subalgebras are ideais or core-free // Доповіді НАН України, 2020, 7, 17-21.
7. Semko N.N., Yarovaya O.A. Groups where non-normal subgroups are close to Abelian groups //Researches in Mathematics, 2021, 19, 113-122.

Список публікацій Ярової О.А.

Публікації у журналах, які індексуються у наукометричній базі Scopus:

1. Semko, N. N., Skaskiv, L. V., & Yarovaya, O. A. (2020). Leibniz algebras, having a dense family of ideals. *Carpathian Mathematical Publications, 12*(2), 451–460. doi:10.15330/cmp.12.2.451-460.
2. Semko, N. N., Skaskiv, L. V., & Yarovaya, O. A. (2020). Linear groups saturated by subgroups of finite central dimension. *Algebra and Discrete Mathematics, 29*(1), 117–128. doi:10.12958/adm1317
3. Semko, N. N., Skaskiv, L. V., & Yarovaya, O. A. (2022). On the derivations of cyclic Leibniz algebras. Carpathian Mathematical Publications, 14(2), 345–353. doi:10.15330/cmp.14.2.345-353.

Статті в іноземних виданнях

1. Постіл С. Д., Ярова О. А. Розвиток інформаційної та математичної компетентностей у процесі міждисциплінарного інформаційного моделювання / С. Д. Постіл, О. А. Ярова // Scinecis of Europe. – 2018. –Vol. 4, No 34. – P. 27–31.
2. Семко М.М., Ярова О.А., Скасків Л.В. Методика формування навиків тотожних перетворень в основній школі. Proceedings of the 13th International Scientific and Practical Conference «Scientific Horizon in the Context of Social Crises» (February 26-28, 2023). Tokyo, Japan

Монографії та підручники

1. Розвиток постмитного аудиту в Україні: монографія /С. С. Брехов, А. А. Капелюш, А. О. Костенко [та ін.] /Ун-т ДФС України, Наук.-дослідний ін-т фіскальної політики. – К: Алерта, 2018. С. – 326 – (Серія «Податкова та митна справа в Україні» ; т. 123).
2. Податкова діяльність держави в умовах становлення інформаційної постіндустріальної економіки: монографія /Н.П.Мацелюх, О.А. Шевчук, А. Максимено [та ін.]. –Ірпінь, 2018. – 362 с. – (Серія «Податкова та митна справа в Україні», т. 107).
3. Yarova O. A. Groups with restrictions on non-normal subgroups (on some most modern directions of scientific algebraic research and their influence on the formation of professional competence of future mathematics teachers):

monograph /O. A. Yarova; shinctific editor M.M. Semko. – Irpin, University of SFS of Ukraine, 2019. – 192 p. – *англійською та українською мовами*

4. Семко М. М. Основні поняття сучасної алгебри /М. М. Семко, О. А. Ярова, Л. В. Скасків ; Університет ДФС України. – Ірпінь , 2020. С. – 128 – (Серія «На допомогу студенту УДФСУ» ; т. 81).
5. На шляху до дотримання податкового законодавства: добровільне розкриття та непрямі методи контролю: монографія /Д. М. Стародуб, О.О. Пунда, Н.М. Лисецька, О.А. Ярова, [та ін.].- Ірпінь, 2021. С. - 89-100.

Статті у фахових журналах

1. Semko N. N. Linear groups saturated by subgroups of finite central dimension [Електронний ресурс] /N. N. Semko, L. V. Skaskiv, O. A. Yarovaya //Algebra and Discrete Mathematics. – 2020. – Vol. 29, No 1. – P. 117–128.
2. Шмелюк Г.В. Методичне забезпечення викладання математики: актуалізація досвіду церковнопарафіяльних шкіл (кінець XIX – початок XX ст.) /Г. В. Шмелюк, О. А. Ярова //Інноватика у вихованні. – 2018. – Вип. 8. – С. 292– 304.
3. Ярова О.А. Інтеграція змісту та нестандартних методів розв'язування задач з алгебри у старшій школі. Наукові записки. Серія: педагогічні науки. – вип. 173, ч.2 – Кропивницький, 2018р. С 143-146
4. Нічишина В. В. Інтеграція змісту та нестандартних методів розв'язування задач з алгебри у старшій школі /В. В. Нічишина, О. А. Ярова //Наукові записки. Серія : Педагогічні науки. – 2018. – Вип. 173. – С. 143–146.
5. Сяська, Н., О. Ярова. "Застосування методів математичного моделювання у поєднанні із засобами новітніх інформаційних технологій у ході вивчення стереометрії майбутніми вчителями математики." Нова педагогічна думка 1 (2019): 114-117.
6. N.N. Semko, L.V. Skaskiv, O.A. Yarovaya. Linear groups saturated by subgroups of finite central dimension. //Допов. Нац. акад. наук Укр. 2019. № 6. – P.3-7.
7. Ярова О. А., Скасків Л. В. Педагогічні умови формування професійної компетентності майбутніх фахівців математичної освітньої галузі. - Вісник науки та освіти (Серія «Педагогіка»): 2023. № 3(9) 2023. С. 645-655.

Тези участі у міжнародних, всеукраїнських конференціях

1. Ярова О.А. Програми розкриття незадекларованих активів у системі адміністрування податків країн Європи. Збірник тез Міжнародного податкового конгресу (м. Ірпінь, 3 грудня 2020 р.). – Ірпінь: Університет ДФС України, 2020. – С 593- 595
2. Semko, N. N., Skaskiv, L. V., Yarovaya, O. A. On leibniz algebras with a dense family of ideals. Збірник тез Міжнародного податкового конгресу (м. Ірпінь, 3 грудня 2020 р.). – Ірпінь: Університет ДФС України, 2020. – С. 213-216. - (Серія «Податкова та митна справа в Україні»; т. 163).
3. Semko, N. N., Skaskiv, L. V., Yarovaya, O. A. On the derevations of cyclic nilpotent Leibniz algebras. book of The 13th international algebraic conference in Ukraine 06.07.2021. Taras Shevchenko National University of Kyiv. P.73
4. О. Ярова Досвід застосування непрямих методів податкового контролю в Естонії. Матеріали II Міжнародного Податкового конгресу, Університет державної фіскальної служби України , 26 листопада 2021 року. – м. Ірпінь, УДФСУ, 2021. – С. 293
5. К. С. Коваленко, О. А. Ярова Нестандартні способи розв'язання раціональних тригонометричних рівнянь. Журнал: Серія «Податкова та митна справа в Україні», том 4, Університет державної фіскальної служби України, м. Ірпінь, УДФСУ, 2021. – С.-1105
6. Л. В. Скасків, О. А. Ярова, В. В. Мартиненко Методика вивчення та суть методів геометричних перетворень як методів доведення. Znanstvena misel journal, Slovenia Учредители: Global Science Center LP – 2021. С. - 37 – 40.
7. О. А. Ярова, Н. С. Корчемлюк Вивчення показникових рівнянь та нерівностей: інноваційна складова. Magyar Tudomanyos Journal (Budapest, Hungary) № 57,2021. С. 24-28.
8. О. А. Ярова, Л. О. Шаповалюк Методика вивчення комбінаторики та теорії ймовірностей у шкільному курсі математики. Znanstvena misel journal, Slovenska cesta 8, 1000 Ljubljana, Slovenia № 60, 2021. С. 22–24.
9. О. Ярова, Н. Романченко Теоретико-методологічні аспекти вивчення тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів. NORVEGIAN JOURNAL OF DEVELOPMENT OF THE INTERNATIONAL SCIENCE – 2021, С. 6-10.
10. Василенкова А. Ю., Ярова О. А. Побудова регіональних прогнозів (Прогнозування соціально-економічного розвитку певного регіону України) The 2nd International scientific and practical conference "Progressive

research in the modern world" (November 2-4, 2022) BoScience Publisher, Boston, USA. 2022.- С. 542-547

11. Москальова Ю. Є., Ярова О. А. Проблеми інноваційної діяльності в сучасних умовах. Збірник наукових праць III Всеукраїнської науково-практичної інтернет-конференції (м. Хмельницький, 16 листопада 2022 р.) – Хмельницький, ХНУ, 2022. – С.121-123
12. І. Бобир, О. Ярова СУЧАСНІ МЕТОДИ ТА ПІДХОДИ РИЗИК-МЕНЕДЖМЕНТУ В УМОВАХ ГЛОБАЛІЗАЦІЇ [Електронний ресурс]: матеріали XIX міжнародної науково-практичної конференції молодих вчених, аспірантів і студентів: Черкаський державний технологічний університет, 24 листопада 2022 року. м. Черкаси, 2022. С. 72-73.
13. А. Тарасенко, О. Ярова ЕКОНОМІЧНИЙ СТАН РИНКУ СТРАХУВАННЯ В УКРАЇНІ ПІСЛЯ ПОЧАТКУ ПОВНОМАСШТАБНОЇ ВІЙНИ [Електронний ресурс]: матеріали XIX міжнародної науково-практичної конференції молодих вчених, аспірантів і студентів: Черкаський державний технологічний університет, 24 листопада 2022 року. м. Черкаси, 2022. С. 306-309.
14. І. Федун, О. Ярова МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ УЧНІВ 5-6 КЛАСІВ [Електронний ресурс] Теорія і практика сучасної науки та освіти: матеріали VIII Міжнародної науково-практичної конференції м. Львів, 19-20 березня 2023 року.- Львів: Львівський науковий форум, 2023. С.41-42.
15. О. Микульська, О. Ярова МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ У ЗАГАЛЬНООСВІТНІЙ ШКОЛІ. The VII International scientific and practical conference "Scientific research in the modern world" (May 4-6, 2023) Perfect Publishing, С. 318-321.

Список публікацій Чернобай О.Б.

Колективні монографії

1. O. Chernobai (2019). On the use of Algorithms in Teaching Probability Theory/ Current Issues in Ensuring the Quality of Mathematical Education: monograph Budapest: SCASPEE, P.138-154.
2. Чернобай О. (2020) Про деякі типи пошукових задач/ Математична освіта: минуле, сьогодення, майбутнє, до 100-річчя від дня народження О.Ф. Семеновича: монографія/М.І.Бурда та ін., за заг ред. Н.А.Тарасенкової.- Харків: СГНТМ «Новий курс», 2020 с.102-10

3. Chernobai O. (2021)Finance and tax word problems in high school math. *Competentization and mathematical education: monograph.* Eds. prof. N. Tarasenkova, & L. Kyba. Budapest : SCASPEE, 2021. P. 39-49.

Навчальні посібники

1. Теорія ймовірностей та математична статистика: розрахункові роботи/ За заг.ред. кандидата фізико-математичних наук, доцента Чернобай О. Б. /М.М.Семко, О.Ю.Бащук, Л.В.Скасків, О.Б.Чернобай. – Київ, 2020. – 80с.
2. Теорія ймовірностей та математична статистика: Збірник задач. За заг.ред. Чернобай О. Б. /М.М.Семко, О.Ю.Бащук, Л.В.Скасків, О.Б.Чернобай. – Київ, 2020. – 114с.
3. Розрахункові роботи з вищої та прикладної математики За заг.ред. Чернобай О. Б. /М.М.Семко, О.Ю.Бащук, Л.В.Скасків, О.Б.Чернобай. Київ, 2019.
4. Теорія ймовірностей та математична статистика(вступний курс) М.М.Семко, О.Ю.Бащук, Л.В.Скасків, О.А. Ярова, О.Б.Чернобай. – Київ, 2020. – 80с.
5. Вища та прикладна математика: збірник вправ та задач: навч. Посібник /О.Ю.Бащук, Л.В.Скасків, С.М. Кучменко,: за заг. ред.О.Б.Чернобай. – Ірпінь,УДФСУ, 2019. – 76с

Тези участі у міжнародних, всеукраїнських конференціях

1. «Алгоритмізація в процесі навчання теорії ймовірностей» VII Міжнародна науково-практична конференція "Математика в сучасному технічному університеті" 28-29 грудня 2018 року, Київ
2. «Про особливості використання алгоритмів в теорії ймовірностей» Міжнародна науково-методична конференція «Проблеми математичної освіти ПМО-2019 », 11-12 квітня 2019 року, Черкаси, Україна
3. «Приклади використання алгоритмів в процесі навчання теорії ймовірностей» Всеукраїнська серпнева конференція «Педагогічний пошук-2019 », 15-16 серпня 2019 року, збірник статей та тез доповідей/ - Київ; «НЕНЦ»,2019.-с.89-92.
4. «Про використання алгоритмів в процесі навчання теорії ймовірностей» Збірник матеріалів науково-практичної конференції «Реалії і перспективи природничо-математичної підготовки у закладах освіти» 12-13 вересня 2019 року, м. Херсон, 2019.с. 35-36.

5. «Роль та значення задач з податковим змістом при формуванні громадянської свідомості». Податковий конгрес «Управління публічними фінансами та проблеми забезпечення національної економічної безпеки» збірник тез Податкового конгресу(м. Ірпінь,12 грудня2019р.)Ірпінь: Університет ДФС України, 2019. С.217-218
6. «Про використання алгоритмів в процесі навчання теорії ймовірностей» Збірник матеріалів науково-практичної конференції «Реалії і перспективи природничо-математичної підготовки у закладах освіти» 12-13 вересня 2019 року, м. Херсон, 2019.с. 35-36.
7. Чернобай, О. Б. (2020). Методичні аспекти навчання фінансової грамотності (Doctoral dissertation, Rome, Italy.).
8. Розанович Д. В., Чернобай О. Б. (2020) Окремі питання методики навчання учнів розвязування текстових задач з математики // Управління публічними фінансами та проблеми забезпечення національної економічної безпеки[Електронне видання]: збірник тез Міжнародного податкового конгресу (м. Ірпінь, 3 грудня 2020 р.). Ірпінь: Університет ДФС України, 2020. – 1421 с. С.1296-1299.
9. Чернобай О., Аніпер В., Каневський Р. Про методичні особливості вивчення теми «Відсотки» // Priority directions of science and technology development. Abstracts of the 7th International scientific and practical conference. SPC “Sci-conf.com.ua”. Kyiv, Ukraine. 2021. Pp. 612-617
10. О.Чернобай, Д. Розанович «Про задачі з фінансовим та податковим змістом в шкільному курсі математики». InterConf, вип. 78, Жовтень 2021, с. 120-5, doi:10.51582/interconf.7-8.10.2021.014.
11. Чернобай О. Б.(2021), Могилко Д. М., Салієнко В. Д., Семеняк О. Г., Методичні особливості навчальних посібників з математики// The world of science and innovation. Abstracts of the 6th International scientific and practical conference. Cognum Publishing House. London, United Kingdom. 2021. Pp. 1156-1159. URL:
12. Чернобай, О., і Д. Могилко. «Про деякі методичні аспекти навчального посібника з математики в ІФКЕП». InterConf, вип. 81, Жовтень 2021, с. 56-61, doi:10.51582/interconf.21-22.10.2021.009
13. Практична компетентність в навчанні тригонометрії . Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2023), м. Черкаси, 6-7 квітня 2023 р.Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2023. с.83

14. Про міжпредметні зв'язки на уроках математики. Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2023), м. Черкаси, 6-7 квітня 2023 р.Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2023. с.215
15. ПРО МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ПІДГОТОВКИ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В СУЧАСНИХ УМОВАХ. Збірник тез доповідей XI Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції:«Сучасні цифрові технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи» с.139

Статті у фахових журналах

1. Чернобай О., Анепір В. Теоретичні аспекти алгоритмічного мислення в навчанні математиці/ Перспективи та інновації науки (Серія «Педагогіка») Видавнича група «Наукові перспективи»» журнал,2021 №3, 2021 С.142-148.

Список публікацій Скасків Л.В.

Публікації у журналах,
які індексуються у наукометричній базі Scopus:

1. N.N.Semko, L.V.Skaskiv, O.A.Yarovaya. Linear groups saturated by subgroups of finite central dimension //Algebra Discrete Math., 2020, Volume 29, Issue 1. P.117–128.
2. N.N.Semko, L.V.Skaskiv, O.A.Yarovaya. LEIBNIZ ALGEBRAS, HAVING A DENSE FAMILY OF IDEALS. //Carpathian Math. Publ. 2020, 12 (2). P.451–460.
3. N.N.Semko, L.V.Skaskiv, O.A.Yarovaya. On the derivations of cyclic Leibniz algebras. //Carpathian Math. Publ. 2022, 14 (2). P.345–353.

Статті у фахових журналах

1. М.Г.Друшляк, Т.Д.Лукашова, Л.В.Скасків. Навчання майбутніх вчителів математики розв"язувати задачі теорії графів із використанням GEOGEBRA. //Фізико-математична освіта. 2019. Випуск 1(19). С.35-40.
2. N.N. Semko, L.V. Skaskiv, O.A. Yarovaya. Linear groups saturated by subgroups of finite central dimension. //Допов. Нац. акад. наук Укр. 2019. № 6. – P.3-7.
3. Скасків Л.В., Лаговський В.В. ПРО КОМУТАНТ НЕПЕРІОДИЧНИХ НЕАБЕЛЕВИХ ГРУП ІЗ ЩІЛЬНОЮ СИСТЕМОЮ НЕПЕРІОДИЧНИХ

НЕАБЕЛЕВИХ ПІДГРУП. «Наука і техніка сьогодні»: журнал. 2023. № 2(16) 2023. С.460-468.

4. Ярова О.А., Скасків Л.В. ПЕДАГОГІЧНІ УМОВИ ФОРМУВАННЯ ПРОФЕСІЙНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ ФАХІВЦІВ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТНЬОЇ ГАЛУЗІ. «Вісник науки та освіти (Серія «Філологія», Серія «Педагогіка», Серія «Соціологія», Серія «Культура і мистецтво», Серія «Історія та археологія»)»: журнал. 2023. № 3(9) 2023. С. 645-655.
5. Скасків Л.В., Лаговський В.В. ПРО БУДОВУ ОДНОГО КЛАСУ ГРУП З УМОВОЮ ЩІЛЬНОСТІ НОРМАЛЬНОСТІ ДЛЯ НЕПЕРІОДИЧНИХ НЕАБЕЛЕВИХ ПІДГРУП. «Наука і техніка сьогодні»: журнал. 2023. № 5(19) 2023. С.133-144.
6. Скасків Л.В., Параниця Н.В., Чернобай О.Б. СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ ПРИ ВИКОРИСТАННІ ХМАРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ. «Наука і техніка сьогодні»: журнал. 2023. № 5(19) 2023. С.42-49.

Тези участі у міжнародних, всеукраїнських конференціях

1. Л.Скасків. Місце задач фінансового змісту в курсі математики. IV International Scientific and Practical Conference (Osaka, Japan 25-27 December 2019). – Р.772-774.
2. Скасків Л.В. Роль та методика розв’язування задач фінансового змісту. Податковий конгрес "Управління публічними фінансами та проблеми забезпечення національної економічної безпеки" (12 грудня 2019 року, Ірпінь). – С.205-206.
3. N.N. Semko, L.V. Skaskiv, O.A. Yarovaya. Linear groups saturated by subgroups of finite central dimension. XII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 215-й річниці з дня народження В. Буняковського (2-6 липня 2019, Вінниця). – С.100-101.
4. Семко М.М., Скасків Л.В., Ярова О.А. On Leibniz algebras with a dense family of ideals. Податковий конгрес "Управління публічними фінансами та проблеми забезпечення національної економічної безпеки" (2020, Ірпінь). – С.213-216.
5. Скасків Л.В., Ружинська Н.О. Можливі наслідки впровадження концептуальних засад реформування середньої школи. Податковий конгрес "Управління публічними фінансами та проблеми забезпечення національної економічної безпеки" (2020, Ірпінь). – С.207-208.

6. Скасків Л.В., Самбора Ю.В. Елементи комбінаторики в загальноосвітніх навчальних закладах. Податковий конгрес "Управління публічними фінансами та проблеми забезпечення національної економічної безпеки" (2020, Ірпінь). – С.1312-1314.
7. Скасків Л.В., Руденко В.В. Застосування графічного методу до розв′язання алгебраїчних задач. Податковий конгрес "Управління публічними фінансами та проблеми забезпечення національної економічної безпеки" (2020, Ірпінь). – С.1300-1302.
8. Скасків Л.В. Алгоритмічний підхід у навчанні математики. Податковий конгрес "Управління публічними фінансами та проблеми забезпечення національної економічної безпеки" (2020, Ірпінь). – С.221-223.
9. Скасків Л.В., Шевчук О.І. Ймовірнісні парадокси. V Всеукраїнська науково-практична інтернет-конференція «Облік і оподаткування: реалії та перспективи» (м. Ірпінь, 1-3 квітня 2020 року). – С.328-332.
10. Скасків Л.В. Місце алгебраїчних структур у підготовці вчителя математики. V Всеукраїнська науково-практична інтернет-конференція «Облік і оподаткування: реалії та перспективи» (м. Ірпінь, 1-3 квітня 2020 року). – С.314-315.
11. Mykola Semko, Lilia Skaskiv, Oksana Yarovaya. On the derivations of cyclic nilpotent Leibniz algebras. 13th International Algebraic Conference in Ukraine (July 6–9, 2021. Taras Shevchenko National University of Kyiv). – P.73.
12. Скасків Л. В. ЗАСТОСУВАННЯ ГРАФІЧНОГО МЕТОДУ ДО РОЗВ′ЯЗУВАННЯ КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ. 6th International scientific and practical conference "Priority directions of science and technology development" (February 20-22, 2021) Kyiv, Ukraine. 2021. – С.551-554.
13. Скасків Л. В., Мартиненко В. В. ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КООРДИНАТ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ДОВЕДЕННЯ. 4th International scientific and practical conference "Science, innovations and education: problems and prospects" (November 10-12, 2021) Tokyo, Japan. 2021). – С.424-428.
14. Скасків Л. В., Мартиненко В. В. МОЖЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМИ GRAN-2D ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ НА ДОВЕДЕННЯ. 6 th International scientific and practical conference "Modern directions of scientific research development" (November 24-26, 2021) Chicago, USA. 2021. – С.602-608.
15. Скасків Л. В., Мартиненко В. В. ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ СОФІЗМІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ НА ДОВЕДЕННЯ. 3 rd

International scientific and practical conference “Modern science: innovations and prospects” (December 5-7, 2021) Stockholm, Sweden. 2021. – C.521-525.

16. Дирда А. М., Скасків Л. В. ПЕРСПЕКТИВИ РОЗВИТКУ НАУКИ, ОСВІТИ ТА СУСПІЛЬСТВА В КОНТЕКСТІ ЄВРОІНТЕГРАЦІЇ/Актуальні проблеми економіки, обліку, фінансів і права в умовах сучасних викликів: збірник тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції (Полтава, 11 жовтня 2022 р.). Полтава: ЦФЕНД, 2022.
17. Жученко К. В., Скасків Л. В. ЕКОНОМІКА ТА УПРАВЛІННЯ ПІДПРИЄМСТВАМИ /Актуальні проблеми економіки, обліку, фінансів і права в умовах сучасних викликів: збірник тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції (Полтава, 11 жовтня 2022 р.). Полтава: ЦФЕНД, 2022.
18. Ковальчук Н. П., Скасків Л. В. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ /Актуальні проблеми економіки, фінансів, обліку і права в XXI столітті: збірник тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції (Умань, 8 листопада 2022 р.). Умань: ЦФЕНД, 2022.
19. Семко М. М., Скасків Л. В. Про будову одного класу УЩН(І)-груп. International Scientific and Practical Conference «Science: Development and Factors its Influence» (December 26-28, 2022). Amsterdam, Netherlands. P.39-41.
20. Іщук Д.Р., Скасків Л.В. Математичне моделювання економічних процесів в умовах глобалізаційних процесів. Питання відбудови економіки України (область, місто, ОТГ) в контексті міжнародних інвестиційних стратегій відновлення: Всеукр. наук.-практ. конф., Київ, 10 листопада 2022 р.
21. Палій В.В., Скасків Л.В. Використання математичного моделювання в економічних дослідженнях. Питання відбудови економіки України (область, місто, ОТГ) в контексті міжнародних інвестиційних стратегій відновлення: матеріали Всеукр. наук.-практ. конф., Київ, 10 листопада 2022 р.
22. Поліщук Г.В., Скасків Л.В. Математичне моделювання у сфері медицини. Питання відбудови економіки України (область, місто, ОТГ) в контексті міжнародних інвестиційних стратегій відновлення: матеріали Всеукр. наук.-практ. конф., Київ, 10 листопада 2022 р.
23. Продан В.Ю., Скасків Л.В. Математичні методи та моделювання у психології. Питання відбудови економіки України (область, місто, ОТГ) в

контексті міжнародних інвестиційних стратегій відновлення: матеріали Всеукр. наук.-практ. конф., Київ, 10 листопада 2022 р.

24. Семко М. М., Скасків Л. В. Про будову одного класу УЩН(І]-груп. II International Scientific and Practical Conference DIVERSITY AND INCLUSION IN SCIENTIFIC AREA held on January 26-28, 2023 in Warsaw, Polan. P.593-595.
25. Семко М. М., Скасків Л. В. Про будову непримарних УЩН (І]-груп. Proceedings of the8thInternational Scientific and Practical Conference «Science, Education, Innovation: Topical Issues and Modern Aspects» (February 16-18, 2023). Tallinn, Estonia. P.419-422.

Навчальні посібники

1. Вища та прикладна математика: збірник вправ та задач: навчальн. посіб. /Бащук О.Ю., Кучменко С.М., Скасків Л.В., Чернобай О.Б.; за заг. ред. О.Б.Чернобай; Державна фіскальна служба України, Університет ДФС України. - Ірпінь, 2019. - 76 с.
2. Основні поняття сучасної алгебри /М.М.Семко, О.А.Ярова, Л.В.Скасків. – Ірпінь: Університет ДФС України, 2020. – 128 с.
3. Скасків Л. В. Теорія чисел та основні структури сучасної математики: навчальний посібник /Л.В.Скасків. – Ірпінь: Університет ДФС України, 2021. – 70 с.
4. Семко М.М., Скасків Л.В. Елементи теорії кілець і полів: навчальний посібник. – Ірпінь: Редакційно-видавничий відділ ДПУ, 2023. – 77 с.
5. Семко М.М., Скасків Л.В. Елементи теорії груп: навчальний посібник. – Ірпінь: Редакційно-видавничий відділ ДПУ, 2023. – 90 с.